infinita
SECUNDARIA

Matemáticas 2

castillo
A Macmillan Education Company

Carlos Bosch | Ana Meda

Infinita es una serie diseñada por el Departamento de Proyectos Educativos de **Ediciones Castillo.**

Autores: D. R. © 2018 Carlos Bosch Gira y Ana Meda Guardiola

Dirección editorial: Tania Carreño
Gerencia de secundaria: Fabián Cabral
Gerencia de arte y diseño: Cynthia Valdespino

Edición: Macbeth B. Rangel Orduña
Asistencia editorial: José R. Benhumea Santiago
Revisión técnica: Ernesto Germán Larios
Corrección de estilo: Antonio Luna

Coordinación de diseño: Rafael Tapia
Coordinación iconográfica: Ma. Teresa Leyva Nava
Coordinación de operaciones: Gabriela Rodríguez
Arte y diseño: Gustavo Hernández y Edwin Ramírez
Supervisión de diseño: Sahie García
Diagramación: Alejandra Díaz de León y Jesús Díaz Castañeda
Iconografía: Jorge Andrés Martínez Cárdenas
Portada: Juan Bernardo Rosado Solís/Shutterstock
Ilustraciones: Víctor Eduardo Sandoval Ibáñez, Víctor Duarte Alaniz, Aarón Gabriel Barreto Sánchez, Genaro Rubio Vera
Fotografía: Shutterstock, © Latinstock México

Producción: Carlos Olvera

Primera edición: abril 2019
Matemáticas 2. Infinita Secundaria

Insurgentes Sur 1886, Florida,
Álvaro Obregón, C. P. 01030,
Ciudad de México, México
Teléfono: (55) 5128-1350
Lada sin costo: 01 800 536-1777
www.edicionescastillo.com

ISBN: 978-607-540-448-6

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Registro núm. 3304

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

El libro que tienes en tus manos forma parte de la serie **Infinita** y fue diseñado con la idea de que el aprendizaje, tu aprendizaje, no tiene límites. Pensamos que para que un aprendizaje permanezca, y no lo olvides al terminar el año escolar, debe ser *significativo*, es decir, tiene que relacionarse con lo que ya sabías, con lo que vives, ves y haces todos los días, y permitirte continuar aprendiendo a lo largo de tu vida.

Con los libros de la serie **Infinita** queremos que aprendas de manera permanente los temas de cada asignatura, y que desarrolles habilidades, actitudes y valores que te permitan reflexionar, expresar tu opinión, resolver problemas y contribuir a la construcción de un mundo en donde prevalezca el aprecio por la dignidad humana, la solidaridad, la empatía, el respeto, el rechazo a todas las formas de discriminación y violencia, y el cuidado de nuestro planeta.

El libro de **Matemáticas 2** ha sido elaborado pensando en ti, en que sea un vehículo que, junto con la guía de tu profesor, te permita analizar fenómenos y situaciones en distintos contextos, interpretar y procesar información, así como plantear y resolver problemas que involucren aspectos matemáticos.

En este libro construirás conceptos matemáticos, algunos de los cuales ya conoces, pero ahora les darás sentido al aplicarlos, y dominarás técnicas y procedimientos para resolver diversos problemas. Además, desarrollarás otras capacidades, como clasificar, analizar, inferir, generalizar y abstraer.

Para facilitar tu aprendizaje, hemos organizado este libro en tres unidades, cada una con secuencias didácticas. En ellas revisarás temas específicos que te ayudarán a lograr cada aprendizaje. Al final de cada unidad encontrarás una serie de actividades pensadas para fortalecer y reforzar los conocimientos que irás adquiriendo.

Esperamos que este libro sea provechoso para ti.

Los editores

Índice

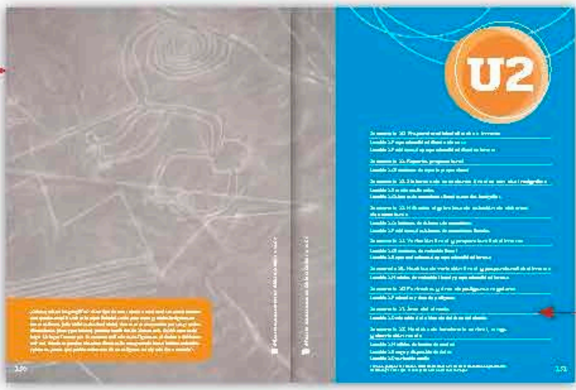
Unidad 2 130

Conoce tu libro

Tu libro se encuentra dividido en tres unidades y cada una se organiza en secuencias, que a su vez se dividen en lecciones.

Entrada de unidad

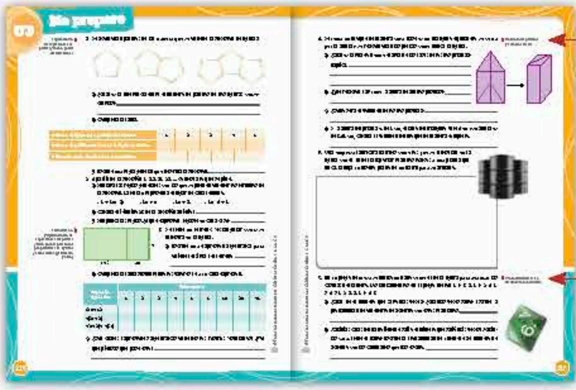
La **entrada de unidad** incluye una imagen acompañada de un texto introductorio; ambos están relacionados con contenidos de la unidad. También hay preguntas para que reflexiones acerca de algún aspecto de la imagen.



En esta página encontrarás las **lecciones** que estudiarás en las secuencias didácticas de cada unidad.

Me preparo

Se trata de un conjunto de **actividades** que aparecen al inicio de cada unidad, para que descubras lo que sabes acerca de los temas que estudiarás.

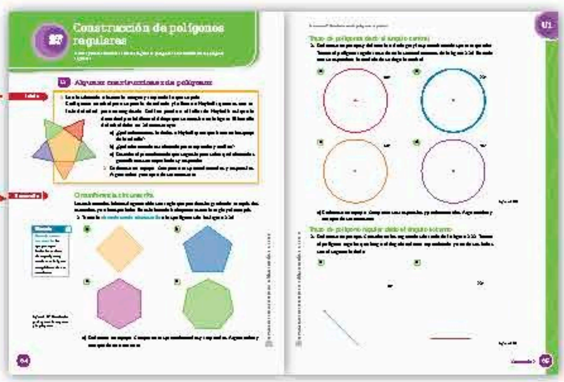


Al costado de cada actividad se indica el tema de la unidad con el que se relaciona.

Organización de las secuencias

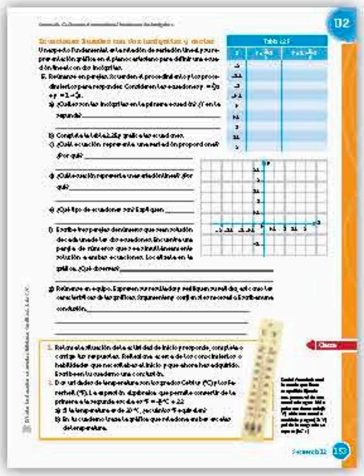
Cada **secuencia** se organiza en **lecciones**, unidades didácticas que abordan contenidos indispensables para cubrir los aprendizajes esperados. En cada lección se identifican tres momentos: inicio, desarrollo y cierre.

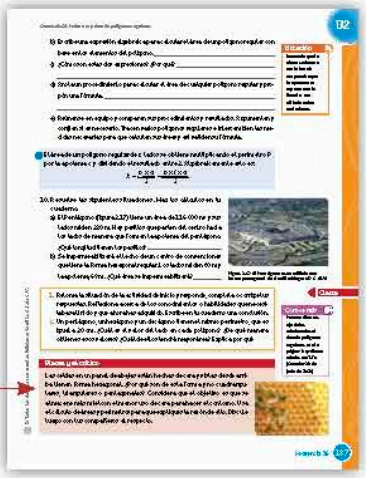
La sección **Inicio** corresponde a una situación problemática que debes resolver a partir de tus conocimientos previos; aquí se ponen en juego tus habilidades para la resolución de problemas. Esta situación se relaciona con el aprendizaje que abordarás en la lección.



La etapa de **Desarrollo** consta de una serie de actividades con las que construirás los conceptos, algoritmos y procedimientos necesarios para alcanzar los aprendizajes esperados. Se incluyen las formalizaciones en las que se expresan de manera clara esos conceptos y procedimientos alcanzados en diferentes momentos del desarrollo.

Cada lección termina con la sección **Cierre**, en la que se retoma el problema de la situación de Inicio, que debes resolver con los conocimientos y habilidades que adquiriste a lo largo de la lección. Además reflexionarás acerca de lo que has aprendido.



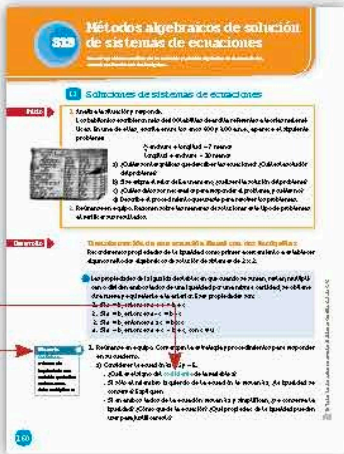


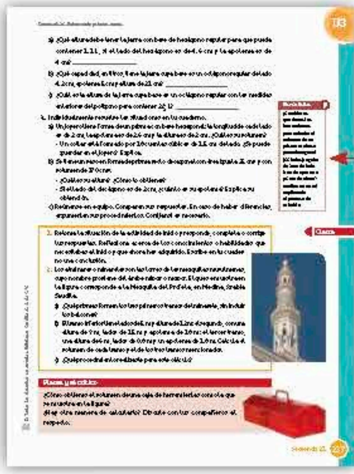
Además, en el cierre de la secuencia encontrarás la sección **Piensa y sé crítico** en la que vincularás e integrarás tus conocimientos para explicar y expresar tu opinión con respecto de una situación real.

Secciones de apoyo

Glosario

A lo largo del texto encontrarás algunas palabras resaltadas en azul; su significado aparece en un recuadro al margen.



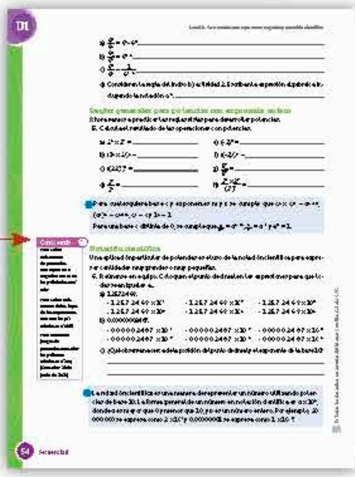


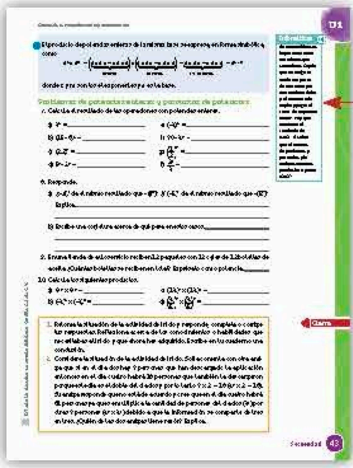
Portafolio

En algunas actividades elaborarás productos (juegos, conclusiones, esquemas, organizadores gráficos) que reunirás en tu portafolio de evidencias.

Conoce más

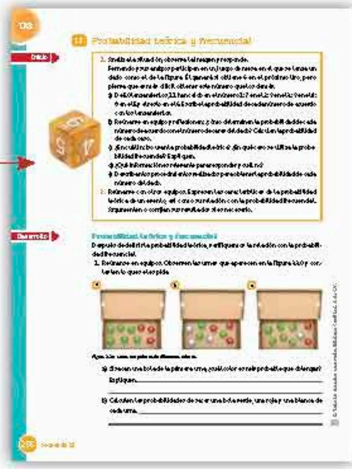
Hallarás recomendaciones de libros, revistas y películas, así como de páginas electrónicas que pueden servirte para realizar alguna investigación, o bien para ejemplificar o profundizar en algún contenido.





Infomáticas

Esta sección contiene información interesante, sobre datos curiosos o de índole histórica, relacionada con los contenidos tratados en la lección.



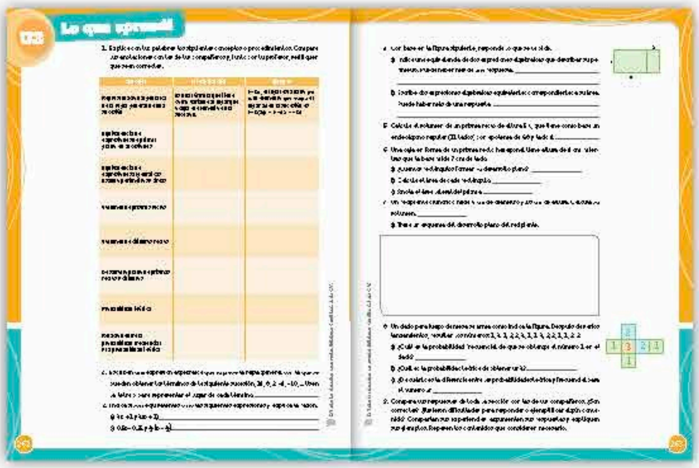
Notación

Las matemáticas tienen una forma de expresión escrita muy particular; te invitamos a conocerla en esta sección.

Infografía

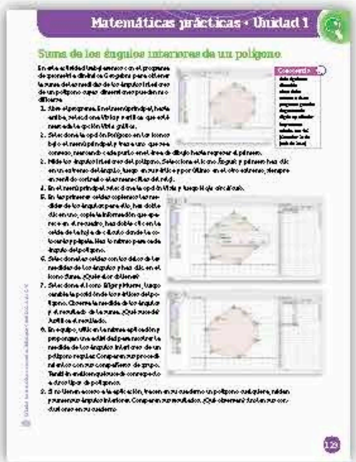
Se trata de un recurso gráfico atractivo que, de manera sintética, explica un hecho o proceso sobre los contenidos tratados o para ampliar información sobre ellos; incluye unas preguntas para analizar o reflexionar acerca de lo que observaste y reflexionaste en la infografía.

Secciones finales de unidad



Lo que aprendí

Se trata de un conjunto de **actividades** que aparecen al final de cada unidad, diseñadas para aplicar lo que sabes acerca de los contenidos que estudiaste.

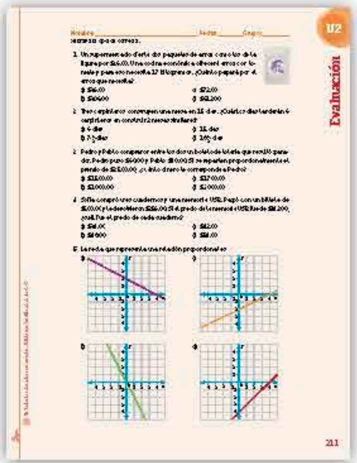


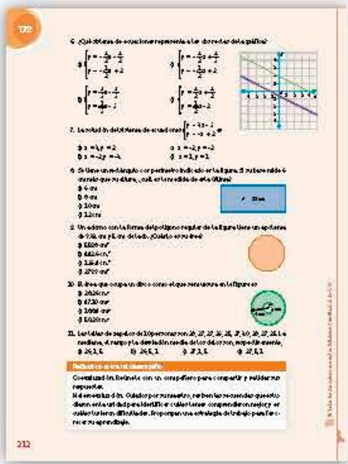
Convivo

Presenta una situación relacionada con algún tema estudiado en la unidad, en la que se requiere emplear una habilidad asociada a la educación socioemocional. Para ello, se ofrece una estrategia y cuestionamientos que guíen en la aplicación de esa habilidad.

Matemáticas prácticas

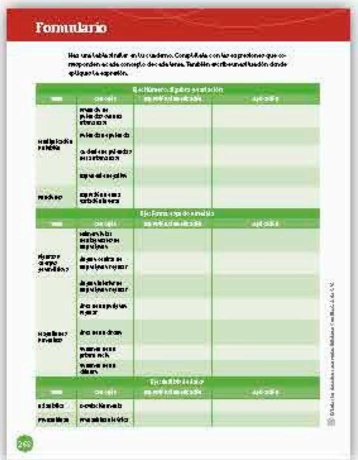
Las herramientas computacionales son imprescindibles en la educación de calidad, por ello incluimos el trabajo con distintas aplicaciones computacionales que reforzarán, aplicarán y ampliarán los temas vistos en la unidad.





Evaluación

Es una sección de actividades para que verifiques tu avance al terminar la unidad. Además, podrás reconocer aquellos temas que necesitas reafirmar.



Formulario

Es una sección al final en la que recopilarás algunas de las formulaciones, en lenguaje algebraico, de conceptos importantes. Además plantearás situaciones en las que éstas se apliquen.

Las matemáticas y la pintura están estrechamente relacionadas, ¿lo sabías? En el Renacimiento se consideraba que una obra era estética, agradable a la vista, cuando las partes que la componían se organizaban de manera tal que creaban un todo exacto, coherente y ordenado. Por tal motivo, muchos artistas se basaron en el principio del paralelismo y el uso de la geometría como sustento para crear sus más grandes obras. Tal fue el caso de la *Sacra Conversación (Sacra Conversazione)* pintada por Piero della Francesca. En ella, ¿qué piensas que indican los trazos de colores?

U1

Piero della Francesca, *Sacra Conversación (Sacra Conversazione)*, Pinacoteca de Brera, Milán, Italia.

Me preparo

Multiplicación y división con fracciones y decimales positivos

1. Contesta las siguientes preguntas.

a) Escribe como fracción 0.45. ______

b) Escribe como decimal $\frac{4}{5}$. ______

c) Escribe con letra 0.00125. ______

2. Calcula lo que se pide.

a) Escribe las fracciones que aparecen en las operaciones como decimales y efectúalas.

- $1.25 + \frac{3}{4} + \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{8} + 1.6 =$ ______ $=$ ______
- $\frac{5}{8} + 3 \times \frac{8}{10} - 4.2 + 2 \times \frac{3}{8} + 1.6 =$ ______ $=$ ______
- $\frac{9}{25} + 1.24 - 10 + 8.84 + \frac{16}{25} =$ ______ $=$ ______

b) Escribe los decimales que aparecen en las operaciones como fracciones y efectúalas.

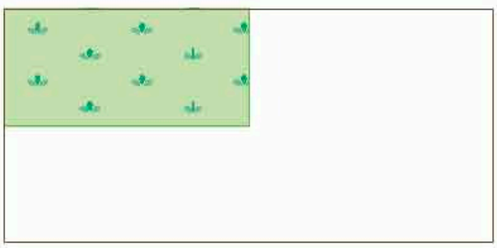
- $0.2 + 0.5 + \frac{7}{10} + 1.6 =$ ______ $=$ ______
- $\frac{5}{8} + 0.25 - \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} - 1.5 =$ ______ $=$ ______
- $\frac{7}{25} - 1.04 - 4.2 + 8.6 + \frac{16}{25} =$ ______ $=$ ______

Multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos

c) Escribe cada una de las siguientes operaciones como una multiplicación y calcula su resultado.

- $-1.2 - 1.2 - 1.2 - 1.2 - 1.2 - 1.2 =$ ______ $=$ ______
- $-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} =$ ______ $=$ ______

3. El siguiente terreno se usará para construir una casa. Responde las preguntas.



16 m

22.5 m

a) Encuentra el área total del terreno. ______

b) En la imagen hay una zona marcada en verde, que será destinada a un jardín. Si es la cuarta parte del terreno, ¿a qué área corresponde? ______

c) Del área que se dedicará a la construcción, las dos terceras partes se reforzarán para construir un segundo piso. ¿Qué área tendrá éste? ______

Problemas de potencias con exponente entero y raíces cuadradas

4. Resuelve los siguientes problemas.

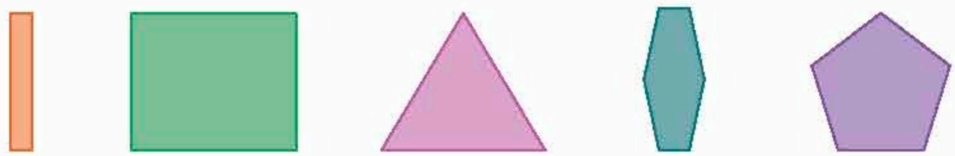
a) Una población de 5 bacterias se quintuplica cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de cuatro horas? ______

b) Se repartirán 64 litros de agua de naranja en 256 botellas iguales. Cada una quedó llena en su totalidad. Para calcular la capacidad de las botellas, ¿es correcto hacer $\frac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4 \times 4}$? ¿Cuál es el resultado? ______

c) ¿Cuál es el lado de un cuadrado que tiene un área igual a 16 cm^2? ______

- ¿Cuál sería el valor del lado si el área fuera igual a 36 cm^2? ______

5. Indica cuáles de los siguientes polígonos son regulares.



Relaciones entre los ángulos de polígonos y construcción de polígonos regulares

6. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Todos los triángulos equiláteros son polígonos regulares. ____________

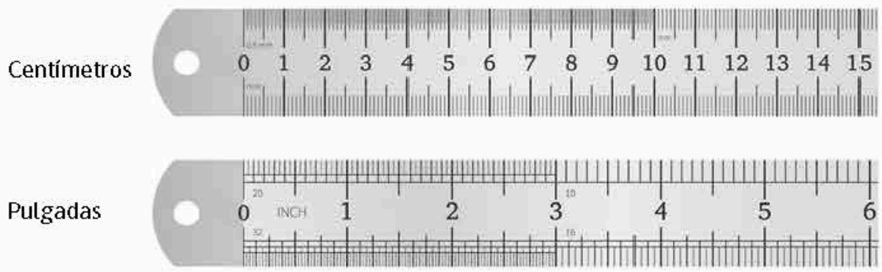
b) Los rombos que no son cuadrados son polígonos regulares. ____________

c) Los círculos son polígonos regulares. ____________

d) Cualquier pentágono tiene en total 5 diagonales. ____________

7. Observa la imagen y responde lo que se te pide.

Conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés



a) ¿A cuántos centímetros equivale una unidad de la regla de abajo? ____________

b) ¿A cuántas unidades de la regla de abajo equivalen 12 cm? ____________

8. A partir de la siguiente gráfica. (Fuente: http://edutics.mx/wXY), contesta las preguntas.

Recolección, registro y lectura de datos en histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea

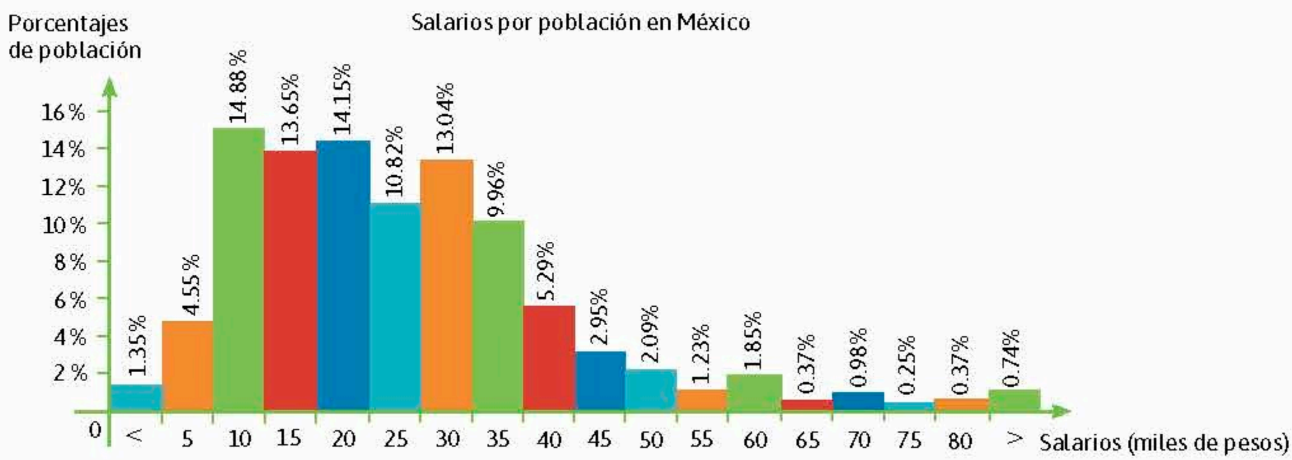
a) ¿De cuánto es el intervalo de cada clase? ____________

b) ¿Cuál es el salario más común en México? ____________

c) ¿Cuál es el salario que menos se paga en México? ____________

d) ¿Entre qué sueldos se da la mayor diferencia de frecuencias? ____________

e) ¿Qué porcentaje suman los tres salarios con mayor frecuencia de pago? ____________



S1 Multiplicación de fracciones y decimales positivos

Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

L1 Multiplicación de fracciones y decimales

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

La señora Lucía comprará en el supermercado $2\frac{3}{4}$ kilogramos de cecina de res para hacer una parrillada para 5 personas el fin de semana. El precio por kilogramo de carne es $192.00

a) ¿A qué número decimal corresponde la cantidad de carne?
b) ¿Cuánto pagará la señora Lucía por la carne?
c) Si Lucía hubiera comprado 0.5 kg de cebolla y el precio de ésta es de $29.90, ¿cuánto hubiera pagado por ella?
d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
e) Describe el procedimiento para conocer los precios a pagar.

2. Reúnanse en equipo, comparen sus respuestas y expliquen sus procedimientos. Corrijan si es necesario.

Desarrollo

Operaciones combinadas

Recordemos algunos aspectos sobre la multiplicación de dos fracciones o de dos decimales, vistos en primer grado, a fin de que nos sirvan para resolver operaciones combinadas.

1. Reúnanse en equipo, lean la situación y hagan lo que se pide.
   Un carro tiene una velocidad de $\frac{3}{4}$ m/s y recorre cierta distancia en 1.6 s.

   a) ¿A que número decimal equivale $\frac{3}{4}$ m? ¿A qué número fraccionario equivale 1.6 s?

   ____

   b) Si la distancia recorrida es igual a la velocidad por el tiempo transcurrido, calculen la distancia del carro con un producto de fracciones y con uno de decimales.

   ____

   c) Con los resultados anteriores, ¿qué puedes decir acerca de $\frac{3}{4} \times 1.6$? ______________

2. Reúnanse en parejas. Recuerden una situación en la cual haya sido necesario multiplicar un número decimal por un número fraccionario. Si no recuerdan ninguna, invéntenla. Establezcan un procedimiento para multiplicar un número fraccionario por un número decimal. Resuelvan su situación.

Para multiplicar un número fraccionario por un número decimal, se puede convertir la fracción a decimal o convertir el número decimal a fracción, y multiplicar.

Por ejemplo, $\frac{2}{5} \times 1.4 = 0.4 \times 1.4 = 0.56$, o $\frac{2}{5} \times 1.4 = \frac{2}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{25}$.

3. Reúnanse en equipo, lean la situación y hagan lo que se pide.
Saúl es dueño de tres terrenos y ha solicitado a dos ingenieros en distintas ocasiones que midieran sus dimensiones para calcular sus áreas. Recibió la información de dos maneras como se muestra en la tabla 1.1, ya que un ingeniero tomó en cuenta partes del total y otro medidas decimales. ¿Cómo puede saber qué medidas corresponden al mismo terreno?

Tabla 1.1

Ingeniero 1			Ingeniero 2		
Terreno	Lado 1 (km)	Lado 2 (km)	Lado 1 (km)	Lado 2 (km)	Terreno
1	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{4}$	1.25	0.125	A
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{8}$	1.6	0.35	B
3	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{20}$	0.9	0.75	C

a) Acuerden la estrategia y el procedimiento para calcular las áreas.
b) Individualmente calcula las áreas y determina la correspondencia entre terrenos.

____

____

c) Reúnanse en equipo y validen sus resultados con ayuda de una calculadora y corrijan si es necesario.
d) Reúnanse con otros equipos y verifiquen los procedimientos que han escrito para multiplicar números decimales y fracciones.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Los estudiantes de ingeniería automotriz de una universidad han diseñado y construido un **prototipo** de un automóvil, el cual recorre 35.74 km por cada litro de gasolina.
   a) ¿Cuántos kilómetros recorrerá con $\frac{3}{4}$ de litro?
   b) ¿Cuántos litros necesita para recorrer 100 kilómetros?

Glosario G

Prototipo. Primer ejemplar que se fabrica de algún objeto y sirve de modelo para otros similares.

Piensa y sé crítico

En una tienda de conveniencia, Berenice y Mariana compraron una botella de agua de 1 L cuyo precio fue de $8.00. Para saber el precio de una botella de agua de 1 250 mL, Berenice dice que hay que multiplicar 8 por 1.25, mientras que Mariana comenta que se tiene que hacer la operación $8 \times \frac{5}{4}$. ¿Quién de las dos tiene razón? ¿Por qué?

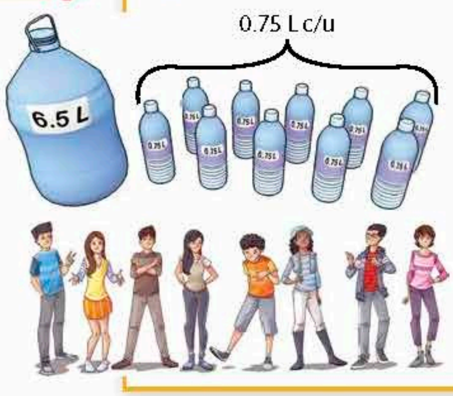
S2 Multiplicación y división con fracciones y decimales positivos

Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

L1 División con números fraccionarios

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.



Sofía irá a una excursión escolar y preparó 6.5 L de agua de jamaica para ella y sus amigos. Su mamá le dio 10 envases de 0.75 L para que envasara la bebida y poderla llevar a la excursión.

a) ¿Sofía y sus amigos tendrán cada quien un envase lleno?

b) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

c) Describe el procedimiento que seguiste para responder.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Repartos, fracciones y divisiones

Averigüemos una manera para calcular cuántas veces cabe una fracción en otra.

1. El abuelo de Claudia le propuso que le enseñaría una manera de efectuar divisiones de fracciones. En las figuras 1.1a, b y c, cada rectángulo representa a la unidad.

   a) Para la figura 1.1a. En el rectángulo superior sombrea $\frac{3}{4}$ del total y en el rectángulo inferior sombrea $\frac{1}{8}$ del total. Luego escribe las fracciones que representan las regiones sombreadas en la casillas.

Figura 1.1a

   - ¿Cuántos octavos caben en $\frac{3}{4}$? ________________
   - ¿Qué operación efectuaste? ¿Por qué? ________________
   - Expresa lo anterior como una operación y su resultado. ________________

   b) Para la figura 1.1b. En el rectángulo superior sombrea $\frac{3}{4}$ del total y en el rectángulo inferior sombrea $\frac{1}{2}$ del total. Luego, escribe las fracciones que representan las regiones sombreadas en la casillas.

Figura 1.1b

- ¿Cuántos medios caben en $\frac{3}{4}$? ______
- Expresa lo anterior como una operación y su resultado. ______

c) Para la figura 1.1c. En el rectángulo superior sombrea $\frac{3}{2}$ del total y en el rectángulo inferior sombrea $\frac{1}{3}$ del total. Luego escribe las fracciones que representan las regiones sombreadas en la casillas.

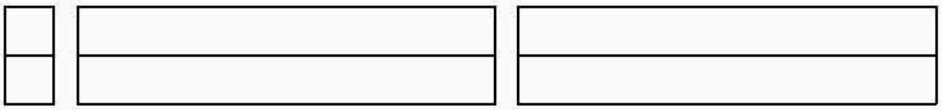

Casillas Rectángulos

Figura 1.1c

- ¿Cuántos tercios caben en $\frac{3}{2}$? ______
- Expresa lo anterior como una operación y su resultado. ______

d) Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados y procedimientos. Identifiquen en los casos anteriores el dividendo, divisor y cociente. ¿En qué casos el residuo fue cero? ______

______

Notación

Dividendo es el número que se va a dividir.

Divisor es el número que divide.

Cociente es el resultado de la división.

Residuo es lo que ha quedado del dividendo, que no se ha podido dividir porque es más pequeño que el divisor.

Recíproco, fracciones y divisiones

Vamos a averiguar otra manera para calcular cuántas veces cabe una fracción en otra, es decir, dividir una fracción entre otra.

2. Reúnanse en equipo, lean la situación y hagan lo que se pide.
Jaime impermeabilizará los techos de varios locales comerciales. Su jefe le dio un esquema donde marcó con una cruz las partes a trabajar (figura 1.2), le dijo que usara $1\frac{1}{4}$ L de impermeabilizante por cada local y le dio $2\frac{1}{2}$ L que tenía guardados en dos botes. ¿Cuántos litros de impermeabilizante necesita Jaime para impermeabilizar los 4 techos marcados?

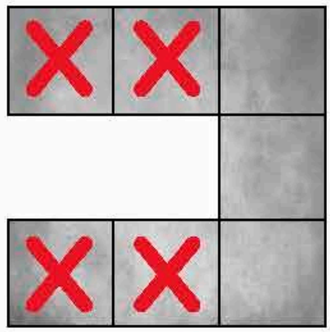


Figura 1.2. Esquema de locales comerciales vistos desde arriba.

a) Acuerden la estrategia y el procedimiento para responder lo siguiente:
   - ¿Cuántos locales podrá impermeabilizar Jaime con los $2\frac{1}{2}$ L de impermeabilizante? Expliquen. ______

     ______
   - Escriban la operación para obtener la solución y su resultado. Usa **fracciones propias** e **impropias**. ______
   - Identifiquen los elementos de la división. ______

     ______

b) Individualmente, escribe el dividendo como fracción impropia. ______
   - Considera al divisor e intercambia numerador y denominador, ¿qué nueva fracción se forma? ______
   - Multiplica la fracción anterior por el dividendo, ¿qué resultado obtienes?

     ______

Glosario

Fracción mixta. Fracción compuesta por una parte entera y una fracción propia.

Fracción propia. Fracción en la que el numerador es menor que el denominador.

Fracción impropia. Fracción en la que el numerador es mayor que el denominador.

- Compara los resultados de los incisos a) y b). ¿Qué observas? ______________________

Notación

En caso de que una fracción sea de la forma $\frac{1}{a}$, en donde a es un número natural, el recíproco es $\frac{a}{1} = a$. Por ejemplo, el recíproco de $\frac{1}{7}$ es 7.

c) Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y procedimientos. Luego respondan: ¿cuántos litros de impermeabilizante necesita Jaime para impermeabilizar los cuatro techos marcados?

A la fracción que se obtiene de otra al intercambiar numerador con denominador se llama **recíproco** de la fracción. Por ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son fracciones recíprocas.

3. Rodrigo trabaja en una mercería y tiene que dividir algunos retazos de listón en pedazos de ciertas longitudes para hacer manualidades (tabla 1.2). La estrategia de Rodrigo es usar el recíproco de una fracción para obtener las longitudes de los pedazos.

Tabla 1.2

Listón (m) Dividendo	Pedazos (m) Divisor
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$

a) Calcula la longitud de los pedazos usando el recíproco de una fracción. Compara los resultados con los que obtuviste en la actividad 1. ¿Qué observas? ______________________

b) ¿Qué relación hay entre las operaciones de multiplicación y división? ______________________

c) Propón un procedimiento para dividir dos fracciones. ______________________

d) Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados y procedimientos. Corrijan de ser necesario. Luego, consideren las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$, y hagan lo siguiente:

- ¿Cuál es el resultado de multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda?. ______________________
- ¿Cuál es el resultado de multiplicar el denominador de la primera por el numerador de la segunda? ______________________
- Formen una fracción cuyo numerador sea el resultado de la primera multiplicación anterior, y el denominador el resultado de la segunda multiplicación. ¿Cuál es la fracción? ______________________
- Comparen la fracción obtenida con los resultados en la tabla 1.3. ¿Qué observan? Escriban un procedimiento para dividir dos fracciones.

____

- ¿Qué relación observan entre las dos maneras de calcular una división de fracciones? ____

____

e) En grupo, comparen sus respuestas y lleguen a una conclusión.

Factores de proporcionalidad, fracciones y divisiones

Ahora daremos un paso más y exploraremos qué pasa al aplicar consecutivamente factores de proporcionalidad.

4. Reúnanse en equipo y hagan lo que se pide.

a) Individualmente considera lo siguiente y responde: se quiere ampliar tres veces la figura 1.3a y reducir cuatro veces la figura 1.3b.

- ¿Por cuál factor se deben multiplicar las medidas de los lados de la primer figura para obtener la figura ampliada? ______________
- ¿Y por cuál para obtener la figura original de la ampliada? ______________
- ¿Por cuál factor se deben multiplicar las medidas de los lados de la segunda figura para obtener la figura reducida? ______________
- ¿Y por cuál para obtener la figura original de la reducida? ______________
- ¿Qué pasa cuando se multiplica el factor para ampliar por el factor para reducir? ______________

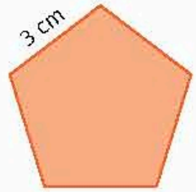


Figura 1.3a Pentágono.

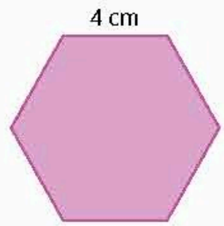


Figura 1.3b Hexágono.

5. Considera las figuras que se indican y haz lo que se pide.

a) A las medidas de los lados del heptágono A (figura 1.4a) se le aplica un factor de $\frac{1}{5}$ y se obtiene el polígono B. Luego, a éste se le aplica un factor de 2 y se obtiene el heptágono C.

- ¿Qué factor permite obtener directamente la figura C a partir de la figura A? ______________
- ¿Qué factor permite obtener directamente la figura A a partir de la C? ______________
- ¿Cómo son los factores anteriores? ¿Por qué?

____

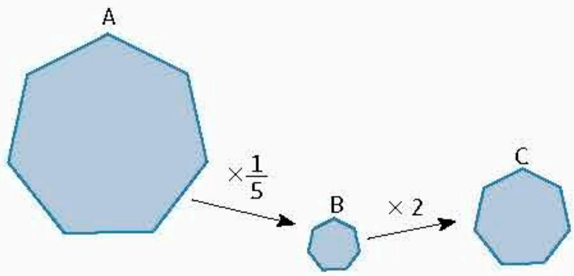


Figura 1.4a

b) A las medidas de los lados del heptágono A (figura 1.4b) se les aplica un factor de $\frac{2}{5}$ y se obtiene la figura B. Luego, a la figura B se le aplica un factor de $\frac{5}{4}$ y se obtiene la figura C.

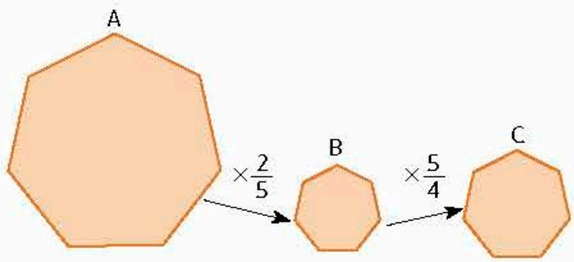


Figura 1.4b

- ¿Qué factor permite obtener directamente la figura C a partir de la figura A? ______________
- ¿Qué factor permite obtener directamente la figura A a partir de la C? ______________
- ¿Cómo son los factores anteriores? ¿Por qué? ______________

____

____

c) Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y expliquen sus procedimientos. Corrijan de ser necesario. Luego, discutan y respondan lo siguiente:

- ¿Se obtiene el mismo resultado al dividir entre el factor que permite obtener directamente la figura C a partir de la figura A que multiplicar por el factor que permite obtener directamente la figura A a partir de la figura C? Expliquen.

- Con base en lo anterior, establezcan un procedimiento para dividir dos fracciones y compárenlo con el que establecieron en los incisos c) y d) de la actividad 3.

d) En grupo, den ejemplos de divisiones de fracciones y validen su procedimiento. Usen calculadora para corroborar sus resultados.

6. Reúnanse en equipo, analicen la situación y acuerden la estrategia y el procedimiento para responder lo que se pide.

Agustín es programador y en una animación por computadora que hizo aplicó dos factores a varias figuras: primero uno a y luego uno b. Luego de unos días, Agustín renunció y Adolfo, otro programador, heredó el proyecto y elaboró la tabla 1.3 con la documentación que encontró.

a) Si Adolfo conoce $a \times b$, ¿cómo puede calcular a? ¿Y b? Consideren los casos en que a o b pueden ser números naturales, fraccionarios o decimales.

Tabla 1.3. Información de factores aplicados a la animación

a	b	$a \times b$
5		$\frac{5}{4}$
	0.4	$\frac{2}{25}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$
0.625		$\frac{5}{7}$

b) Individualmente completa la tabla 1.3.

c) Comparen con sus compañeros de grupo los resultados obtenidos. Usen calculadora para validarlos. Luego, escriban una conclusión.

Para **dividir** una fracción entre otra hay que **multiplicar la primera** por el **recíproco de la segunda**.

Por ejemplo, $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12}$.

Problemas de división de fracciones

Ahora pondremos en práctica lo que hemos aprendido acerca de la división entre dos fracciones positivas.

7. Resuelve las divisiones de fracciones.

a) $\frac{4}{5} \div \frac{5}{2} =$

b) $\frac{3}{10} \div \frac{3}{5} =$

c) $\frac{8}{3} \div \frac{2}{5} =$

d) $\frac{3}{5} \div \frac{6}{3} =$

e) $\frac{17}{100} \div \frac{4}{5} =$

f) $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$

g) $2\frac{3}{8} \div \frac{4}{5} =$

h) $3\frac{2}{6} \div 4\frac{5}{8} =$

Portafolio P

¿Cómo calcularías la operación $\left(3 \div \frac{6}{5}\right) \div \left(\frac{4}{5} \div 6\right)$? Escribe el procedimiento y exponlo al grupo.

8. Ana cosió cuadritos de tela de $\frac{1}{10}$ m por lado para hacer un adorno para una fiesta de aniversario. ¿Cuántos cuadritos tiene el adorno si mide 14 m? ____________

9. Pablo compró $1\frac{1}{4}$ L de helado y quiere hacer porciones de $\frac{1}{5}$ L. Él piensa que tendrá 6 porciones completas exactas. ¿Es correcta su suposición? Explica. ____________

____

____

____

10. Usa los hexágonos de la figura 1.5 para ilustrar la operación $1\frac{1}{2} \div 3$.

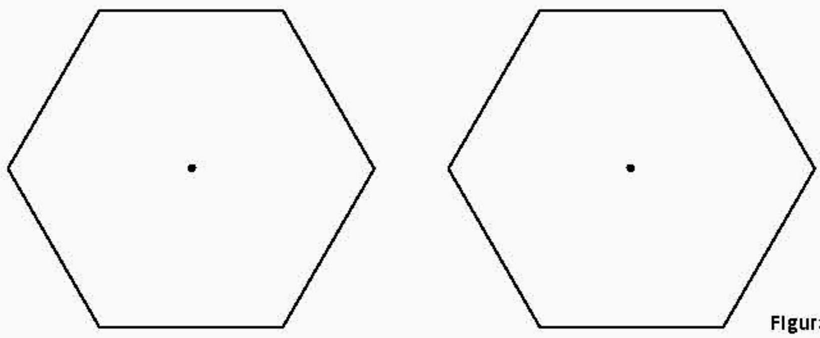


Figura 1.5 Dos hexágonos

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Imagina que eres el encargado de programación y continuidad en una radiodifusora. Se te ha ocurrido que, para aumentar la audiencia de jóvenes, programarás segmentos de música continua (sin anuncios), con duración de $1\frac{1}{2}$ hora, formados con mezclas de DJ (*disc jockey*) invitados con duración de $\frac{1}{12}$ de hora.
   a) ¿Cuántas mezclas seguidas tocará el DJ en hora y media?
   b) Si planeas invitar a tres DJ en lugar de uno, ¿cuántas mezclas podrá hacer cada uno en esa hora y media?

L2 Problemas de multiplicación y división de fracciones

Inicio

1. Un agricultor dividirá un terreno con un área de 74.6 m² de la siguiente manera: en la octava parte plantará árboles frutales, la sexta parte la ocupará para plantas de **ornato** y el resto lo dejará para **hortalizas**.

   a) ¿Qué fracción corresponde a 74.6 m²?
   b) ¿Qué área, en metros cuadrados, ocupará para plantar los árboles frutales, las plantas de ornato y las hortalizas?
   c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   d) ¿Usaste el mismo procedimiento para calcular cada área? Explica.

2. Reúnanse en equipo. Perfeccionen sus técnicas de solución de multiplicaciones y divisiones de fracciones al revisar, argumentar y corregir sus resultados.

Desarrollo

Aplicación de la multiplicación

Los problemas de proporcionalidad se pueden resolver con multiplicaciones y divisiones.

1. Andrés vio en una tienda unos zapatos (figura 1.6) y entró a comprarlos. Como estaban en oferta, pagó $\frac{3}{4}$ del precio original.

Figura 1.6

   a) ¿Cuánto pagó Andrés por los zapatos? ____________
   b) ¿Cuál fue tu procedimiento para encontrar la respuesta? ____________
   ____
   ____
   c) ¿Cómo puedes verificar tu respuesta? ____________
   ____

2. Marcela ha comprado en el mercado $3\frac{2}{3}$ kg de carne para cocinarla en cinco días y ocupará diferentes porciones según las recetas que tiene. Para calcular la cantidad de carne, no sabe si multiplicar o dividir el total de la carne por cada fracción del total, es decir, la porción.
   a) ¿Qué procedimiento debería seguir Marcela? ____________
   ____
   ____
   ____
   b) Completa la tabla 1.4 de la página 25.

Glosario G

Ornato. Adorno.

Hortalizas. Verduras y otras plantas comestibles que se cultivan principalmente en huertas.

Infomáticas I

El origen de las fracciones se puede localizar en civilizaciones tan antiguas como Egipto, Babilonia y China, con el fin de evitar cálculos complicados con largas listas de decimales y así obtuvieron un nivel de aproximación sorprendente.

Tabla 1.4 Porciones de carne				
Porción a utilizar	**Recíproco de la fracción de la porción**	**Operación con factor original**	**Operación con factor recíproco**	**Kg de carne a utilizar**
$\frac{1}{3}$	3			
$\frac{1}{20}$				
$\frac{1}{4}$				
$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{5}$				

c) ¿Qué relación encuentras entre la multiplicación y la división de fracciones, considerando los factores recíprocos? ______________________________

____

____

3. Considera el triángulo de la figura 1.7.

a) ¿Cuánto mide la base? ______________________________

b) Describe tu procedimiento para obtener esta medida. ______________________________

____

____

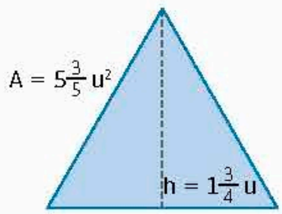


Figura 1.7

c) Reúnanse en equipo. Resuelvan las diferencias en los resultados y los procedimientos argumentándolos. Corrijan si es necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Una panadería empacará $15\frac{1}{2}$ kilogramos de galletas en paquetes que contienen $\frac{3}{4}$ kg.
   a) ¿Cuántos paquetes completos se podrán tener?
   b) ¿Cuál es el procedimiento para saber esta cantidad?
   c) ¿Cuántos kilogramos de galletas quedarán sin empacar? ¿Por qué?

Conoce más

Para practicar la multiplicación y la división de fracciones, entra en: http://www.edutics.mx/3RF. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Piensa y sé crítico

Se tiene una olla con una capacidad de $2\frac{1}{2}$ L, la cual contiene agua hasta $\frac{5}{8}$ de su capacidad total. Se requieren 1.8 L para preparar una sopa de verduras. ¿Alcanza el agua? ¿Cuánto falta o sobra? ¿Cuál es tu procedimiento para saber las respuestas?

S3 Multiplicación y división de números positivos y negativos

Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

L1 Multiplicación de números positivos y negativos

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
Una persona se encuentra en el punto 0 del camino mostrado en la figura

a) Si camina 3 unidades hacia la izquierda, ¿a qué valor llega?
b) Desde ese punto, camina de nuevo 3 unidades a la izquierda. ¿En cuál valor se ubica esta vez?
c) Expresa el recorrido total como una suma.
d) Expresa el recorrido total como una multiplicación.
e) La persona recorre 3 unidades a la izquierda 5 veces. Expresa como suma y como producto el recorrido total
f) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
g) Explica el procedimiento que seguiste para responder.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y procedimientos. En caso de discrepancias, argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Multiplicación de un número negativo y otro positivo

Se puede interpretar la multiplicación como la suma repetida de un mismo número. Exploremos esa idea para la multiplicación de números con signo.

1. Considera nuevamente que una persona se encuentra en el punto 0 de un camino (figura 1.8) y que hace otros recorridos.

Figura 1.8. Persona caminando en línea recta partir de un punto 0.

a) Considera que primero recorrió −1 unidad cuatro veces. Expresa dicho recorrido como suma repetida y como producto. ______
• ¿A qué punto llegó la persona? ______
b) Completa la tabla 1.5, de la página 27, para determinar los puntos de llegada.

Tabla 1.5				
Unidades recorridas	**Veces que recorre las unidades**	**Expresión como suma repetida**	**Expresión como producto**	**Punto de llegada**
-2	2			
-5		$(-5)+(-5)+(-5)$	$3\times(-5)$	-15
	4		$4\times(-4)$	-16
-7	5			

c) Reúnanse en equipo y comparen sus respuestas, corrijan de ser necesario. Luego, respondan lo siguiente:

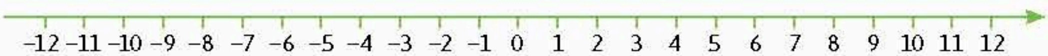
- ¿Qué tipo de números, positivos o negativos, son los factores de cada producto? ____________________
- En cada caso, ¿qué tipo de número, positivo o negativo, es el resultado del producto? ____________________
- Escriban una conclusión acerca de la multiplicación de un número positivo por un número negativo. ____________________

____

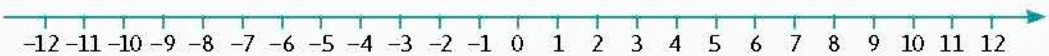
- En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas.

2. Realiza lo que se te pide y responde a las preguntas.

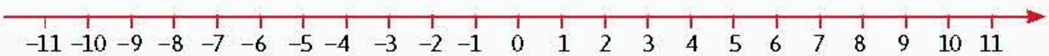
a) Representa $(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$ en la recta numérica.



b) Ahora representa $6\times(-2)$.



c) ¿Cómo representas en la recta numérica la operación $(-2)\times 6$?



d) ¿Qué relación hay entre las tres representaciones? ____________________

e) ¿Existe alguna relación entre las tres operaciones? ¿Cuál? ____________________

____

3. Representen en la recta numérica el resultado de $5\times(-2)$, $(-5)\times 2$ y 5×2; y también el de $4\times(-3)$, $(-4)\times 3$ y 4×3.

a) Compara los resultados. ¿Cómo son? Explica. ____________________

____

b) Responde en tu cuaderno. Traza una recta numérica y ubica el 0.

- ¿A qué punto llegas si haces 5 recorridos de -0.25? Escribe una suma repetida y un producto que represente la situación.
- ¿Cuál es el resultado de $(-0.25)\times 5$ y $5\times(-0.25)$? ¿Cómo lo comprobarías?
- ¿Cómo calcularías el resultado de $(-3)\times\frac{2}{3}$ y $3\times\left(-\frac{2}{3}\right)$?

c) Con base en lo anterior, plantea una propiedad que se pueda usar para multiplicar números positivos y negativos. ______________________________

____

4. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y los procedimientos para responder lo que se pide.

a) Completen la tabla 1.6 en la que se muestran tres sucesiones.

Tabla 1.6

Sucesión 1	3×6	2×6	1×6	0×6	$(-1)\times 6$				
	18								
Diferencias	6								
Sucesión 2	2.5×3	2.5×2							
	7.5								
Diferencias									
Sucesión 3	$3\times\frac{2}{3}$	$2\times\frac{2}{3}$							
Diferencias									

b) Con base en la tabla 1.6, respondan.

- ¿Cómo es el resultado de la multiplicación de dos números positivos, positivo o negativo? ______________________________
- ¿Cómo es el resultado de la multiplicación de un número positivo y otro negativo? ¿Es positivo o negativo? ______________________________

Notación

Si a un número no se le antepone un signo, se considera que es positivo, es decir,

$$a = +a$$

c) Con base en lo anterior, discutan y propongan una regla general para multiplicar un número positivo por un número negativo. ______________________________

____

d) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten si hay discrepancias y corrijan de ser necesario.

- Validen su regla. Den algunos ejemplos de producto de un número positivo por otro negativo.

5. Escribe los términos que se piden en cada sucesión.

a) Escribe los siguientes 5 términos de la sucesión 20, 15, 10, 5, 0, ... ______________________________

____

b) Escribe los siguientes 5 términos de la sucesión $5 \times 4, 5 \times 3, 5 \times 2, 5 \times 1, 5 \times 0, \ldots$

____

c) Escribe los siguientes 5 términos de la sucesión $4 \times 5, 3 \times 5, 2 \times 5, 1 \times 5, 0 \times 5, \ldots$

____

d) ¿Hay alguna relación entre las tres sucesiones? ¿Cuál? ______________

e) Escribe los siguientes 5 términos de la sucesión $-20, -15, -10, -5, 0, \ldots$ ______

____

f) Escribe los siguientes 5 términos de la sucesión $(-5) \times 4, (-5) \times 3, (-5) \times 2, (-5) \times 1, (-5) \times 0, \ldots$ ______________________

g) Escribe los siguientes 5 términos de la sucesión $4 \times (-5), 3 \times (-5), 2 \times (-5), 1 \times (-5), 0 \times (-5), \ldots$ ______________________

h) ¿Qué relación observas entre las tres sucesiones? ______________

____

El **producto de un número negativo con uno positivo** es un número negativo. Por ejemplo:

$$-2 \times 3 = 2 \times (-3) = -6$$

Multiplicación de números negativos

Ahora analizaremos el caso de la multiplicación si ambos números son negativos, y nos apoyaremos de sucesiones.

6. Reúnanse en equipo y determinen la estrategia y el procedimiento para responder lo que se pide.
   a) Completen la tabla 1.7 en la que se muestran tres sucesiones.

Tabla 1.7

Sucesión 1	$2 \times (-4)$	$1 \times (-4)$	$0 \times (-4)$				
	-8						
Diferencias	4						
Sucesión 2	$(-3.2) \times 2$	$(-3.2) \times 1$					
	-6.4						
Diferencias							
Sucesión 3	$2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$	$1 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$					
Diferencias							

b) Con base en la tabla 1.7, respondan.
- ¿Cómo es el resultado de la multiplicación de un número positivo y otro negativo, positivo o negativo? ______
- ¿Cómo es el resultado de la multiplicación de dos números negativos, positivo o negativo? ______
- ¿Cómo es el resultado de la multiplicación de dos números positivos, positivo o negativo? ______

c) Con base en lo anterior, discutan y propongan una regla general para multiplicar dos números positivos y dos números negativos. ______

d) En grupo y con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten si hay discrepancias y corrijan de ser necesario.
- Validen su regla. Den algunos ejemplos de producto de dos números positivos o dos números negativos.

Conoce más
Para saber más acerca de la multiplicación de números con signo, visita la página: http://www.edutics.mx/3K2. (Consulta: 20 de junio de 2018).

El **producto de dos números positivos** es un número positivo; y el **producto de dos números negativos** es un número positivo. Por ejemplo:

$$2 \times 3 = (-2) \times (-3) = 6$$

Figura 1.9. Submarino a nivel del mar. Los 0 metros marcan la superficie del mar.

Problemas de multiplicación de números positivos y negativos

Ahora apliquemos lo aprendido sobre la multiplicación de números con signo.

7. Un submarino se encuentra a nivel del mar (figura 1.9) y comienza a descender: después de 1 s está a −1.5 m, a los 2 s está a −3 m, y así sucesivamente. Completa la tabla 1.8 que registra la profundidad del submarino respecto al tiempo transcurrido.

Tabla 1.8 Registro de profundidad del submarino

Tiempo (s)	Operación	Profundidad (m)
5		
7.5		
$9\frac{3}{8}$		
10		
$12\frac{1}{2}$		−18.75
15		
17.6		
$\frac{102}{5}$		

a) ¿Por qué se consideran los metros que desciende el submarino como números negativos? ____________________

b) ¿Qué procedimiento realizaste para multiplicar el número decimal que representa la profundidad por cada fracción de los segundos en los que desciende? ____________________

____

c) ¿Cuántos metros habrá bajado en un minuto? ____________________

d) ¿Cuántos metros descendió en una hora? ____________________

e) ¿Los procedimientos que usaste para responder los incisos c) y d) fueron los mismos que los que aplicaste para completar la tabla? Argumenta tu respuesta: ____________________

____

8. Calcula el resultado de las multiplicaciones.

a) $12 \times (-8) =$ ____________

b) $(-11) \times 15 =$ ____________

c) $(-6.7) \times 7 =$ ____________

d) $5.9 \times -6 =$ ____________

e) $(-3) \times 8.32 =$ ____________

f) $9 \times (-3.17) =$ ____________

g) $\left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{5}{12}\right) =$ ____________

h) $\left(-2\frac{2}{5}\right) \times \left(3\frac{1}{2}\right) =$ ____________

i) $\left(2\frac{1}{4}\right) \times (-7.8) =$ ____________

j) $(-5.32) \times \left(-7\frac{3}{4}\right) =$ ____________

9. Reúnanse en equipo. Discutan y resuelvan lo que se pide.

a) ¿Cuál es el resultado de $(-5) \times (-5) \times (-5)$? ____________________

b) ¿Cuál es el resultado de $(-5) \times (-5) \times 5$? ____________________

c) ¿Cuál es el resultado de $(-5) \times 5 \times 5$? ____________________

d) ¿Cuál es el resultado de $5 \times 5 \times 5$? ____________________

e) En su cuaderno propongan una manera de multiplicar tres números que pueden tener signos distintos. Asegúrense de que contemplan todos los casos posibles.

f) Validen su propuesta al resolver varios productos de tres números.

10. En grupo, comparen sus respuestas y procedimientos. Validen con calculadora sus resultados. En caso de discrepancias, argumenten y corrijan de ser necesario.

Portafolio P

El matemático francés Lazare Marguerite Carnot (1753-1823) decía: "Para obtener realmente una cantidad negativa aislada, se debería restar una cantidad efectiva de cero o bien quitar algo de nada. ¿Cómo se puede concebir una cantidad negativa aislada?".

Discute con tus compañeros la opinión de Carnot e investiga sobre los números negativos.

Explica qué significa multiplicar dos números negativos.

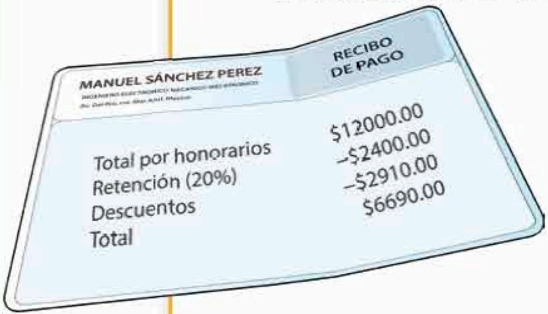
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Alejandro vende artesanías. Hace un recuento de sus ingresos y sus gastos en un día y anota en una hoja las cantidades que recibe por las ventas y el dinero que ocupa en las compras de materiales para elaborar sus productos.
   a) Supón que el ingreso y el gasto son \$600.00 y –\$400.00 respectivamente y la situación se repite diariamente. ¿Cuánto dinero le queda al final de la semana? ¿Cuánto dinero recibe al final del mes?
   b) ¿Qué signo colocaste a los resultados? ¿Por qué?

L2 División de números positivos y negativos

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
En el laboratorio químico donde trabaja Manuel ha roto, por descuido, un equipo que cuesta $2 910.00 y se le descontará de su sueldo quincenal.
   a) ¿Con qué signo debe considerar el contador de la empresa en la contabilidad el costo del equipo dañado? Explica.



   b) Además de Manuel, José y Juan tuvieron que ver en el incidente. Si ganan igual, ¿cuánto deberá pagar cada uno? ¿Cómo se indicará esa cantidad en sus recibos?
   c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   d) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

División de números con signo

Ya conocemos las reglas para calcular un producto de números con signo. Ahora nos apoyaremos en ellas para explorar la división.

1. Toño y Lalo se encuentran en el punto 0 del camino mostrado en figura 1.10.

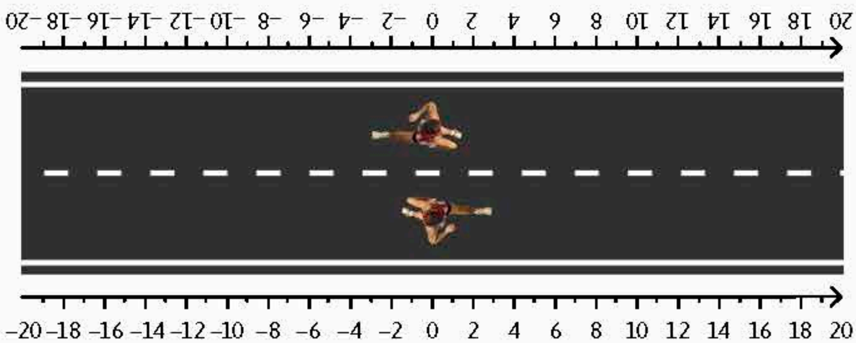


Figura 1.10

   a) Toño irá del punto de inicio al punto 18 en seis saltos iguales. Marca su recorrido en la recta numérica. ¿Cuántas unidades recorre en cada salto? ____________
   b) Multiplica el número de saltos por las unidades que recorrió en cada uno. ________
   c) ¿Con qué operación calculas las unidades que recorre en cada salto? ____________
   d) Lalo irá del punto de inicio al punto −18 en seis saltos iguales. Marca su recorrido en la recta numérica. ¿Cuántas unidades recorre en cada salto? ____________
   e) Multiplica el número de saltos por las unidades que recorrió en cada uno. ________
   f) ¿Con qué operación calculas las unidades que recorre en cada salto? ____________
   g) Compara tus respuestas a los incisos c) y f). ¿Qué observas? ____________

____

____

Notación
En una recta numérica horizontal, que es positiva hacia la derecha, las unidades que están a la derecha del 0 se consideran positivas y las que están a la izquierda, negativas. En una recta numérica vertical, que es positiva hacia arriba, las unidades que están hacia arriba del 0 se consideran positivas y las que están hacia abajo, negativas.

h) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Expresen con lenguaje matemático sus argumentos y corrijan de ser necesario.

2. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder.

a) En todo producto es posible asociar dos divisiones. Por ejemplo, con el producto $6 \times 3 = 18$, se relacionan $18 \div 6 = 3$ y $18 \div 3 = 6$. Completen la tabla 1.9.

Tabla 1.9 Algunos productos y sus divisiones relacionadas

Producto	Divisiones relacionadas		Producto	Divisiones relacionadas	
$5 \times 1.25 = 6.25$			$5 \times -1.25 = -6.25$		
$5.2 \times 3 = 15.6$			$-5.2 \times 3 = -15.6$		
$1.2 \times 5.8 = 6.96$			$1.2 \times (-5.8) = -6.96$		
$\frac{12}{5} \times 3 = \frac{36}{5}$			$-\frac{12}{5} \times 3 = -\frac{36}{5}$		
$2 \times \frac{5}{8} = \frac{10}{8}$			$2 \times -\frac{5}{8} = -\frac{10}{8}$		
$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$			$\frac{3}{4} \times -\frac{5}{8} = \frac{15}{32}$		
$-4 \times -5 = 20$			$-0.4 \times -0.2 = 0.08$		

b) ¿Qué relación observan entre los resultados de dividir números positivos y los de dividir números con signo contrario? ______________________________

____

c) ¿Qué relación observan entre los resultados de dividir números positivos y los de dividir números negativos? ______________________________

____

d) Propongan dos reglas: una para calcular la división de dos números que tengan signos distintos, y otra para la división de dos números negativos. ______________

____

____

____

____

____

____

3. Reúnanse en equipo y completen la tabla 1.10. Validen sus reglas propuestas.

Tabla 1.10

División	Inverso multiplicativo del divisor	Producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor
$18 \div (-3) = -6$		
$(-35) \div (-7) = 5$		
$\left(-\frac{2}{3}\right) \div 6 = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$		
$-4 \div \frac{1}{5} = -20$		
$\left(-\frac{3}{8}\right) \div \frac{4}{5} = -\frac{15}{32}$		
$\left(-\frac{5}{6}\right) \div \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$		

a) ¿Qué relación observas entre la división de números con signo y el producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor? ______________________________

____

b) ¿Se obtienen los mismos resultados si en lugar de multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor, haces el producto del inverso del dividendo por el divisor? Explica. ______________________________

____

c) ¿Las reglas que propusiste en el inciso c) de la actividad 2 se mantienen o hay que cambiarlas? ¿Por qué? ______________________________

____

d) En grupo, con la guía del profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Lleguen a una conclusión.

Notación

La parte periódica de un número decimal se suele representar con una línea horizontal superior. Por ejemplo $0.33333333\ldots = 0.\overline{3}$

El **cociente de un número positivo y otro negativo** (o de uno negativo entre uno positivo) es un número negativo. Por ejemplo, $-2 \div 3 = 2 \div (-3) = -0.\overline{6} = -\frac{2}{3}$

El **cociente de dos números negativos** (o dos positivos) es un número positivo. Por ejemplo, $2 \div 3 = (-2) \div (-3) = 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$

Problemas de cociente de números con signo

Apliquemos a continuación las reglas para resolver la división de números con signo.

4. Completa las multiplicaciones y divisiones.

a) $(-5) \times (\_\_\_\_) = -40$

b) $(-40) \div (-5) = \_\_\_\_$

c) $\frac{1}{2} \times (\_\_\_\_) = 4$

d) $4 \div \left(\frac{1}{2}\right) = \_\_\_\_$

e) $45 \times \left(\frac{1}{5}\right) = \_\_\_\_$

f) $(\_\_\_\_) \div 45 = \left(-\frac{1}{5}\right)$

g) $(-7.7) \times (-11) = \_\_\_\_$

h) $(\_\_\_\_) \div (-7.7) = -11$

i) $(\_\_\_\_) \times (8.5) = -51$

j) $(-51) \div (\_\_\_\_) = 8.5$

k) $(\_\_\_\_) \times (-17) = -51$

l) $(-51) \div (\_\_\_\_) = -17$

- ¿Qué observas respecto a los números con los que completaste cada operación? ______________________________

____

- ¿Por qué consideras que pasa esto? ______________________________

____

- Explica la relación que se da entre la multiplicación y la división, de acuerdo con esta actividad: ______________________________

____

Conoce más

Entra a la liga: http://www.edutics.mx/3Ku. En ella verificarás los principios de la división de números con signo y los aplicarás en problemas. (Consulta: 20 de junio de 2018)

5. Resuelve las divisiones de números con signo.

a) $72 \div (-8) =$ ____________

b) $(-60) \div 15 =$ ____________

c) $6.8 \div 4 =$ ____________

d) $(-6.9) \div (-5) =$ ____________

e) $(-3.8) \div (1.9) =$ ____________

f) $(19.6) \div (-3.1) =$ ____________

g) $\frac{3}{7} \div \left(-\frac{2}{3}\right) =$ ____________

h) $\left(-3\frac{2}{5}\right) \div \left(-\frac{5}{8}\right) =$ ____________

i) $\frac{3}{4} \div 0.6 =$ ____________

j) $(-4.25) \div \left(2\frac{1}{2}\right) =$ ____________

6. Reúnanse en equipo. Discutan y resuelvan lo que se pide. Usen calculadora.

a) ¿Cuál es el resultado de las siguientes divisiones?

- $(-5) \div (-5) \div (-5)$ y $(-5) \div (-5) \div 5$ ____________
- $(-5) \div 5 \div 5$ y $5 \div 5 \div 5$ ____________

b) ¿El resultado sería el mismo si operan primero los dos últimos números? ¿Cuál sería el resultado? ____________

c) ¿Es importante el orden de operación? ¿Por qué? ____________

____

d) Propongan una manera de dividir tres números que pueden tener signos distintos. Asegúrense de que contemplan todos los casos posibles y el orden de operación.

____

____

e) Validen su propuesta al resolver varias divisiones de tres números.

7. En grupo, comparen sus respuestas y procedimientos. Validen con calculadora sus resultados. En caso de discrepancias, argumenten y corrijan de ser necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Un corredor se entrena para una carrera yendo de 0 a −25 km diarios, respecto a un sistema de referencia que se ha puesto.

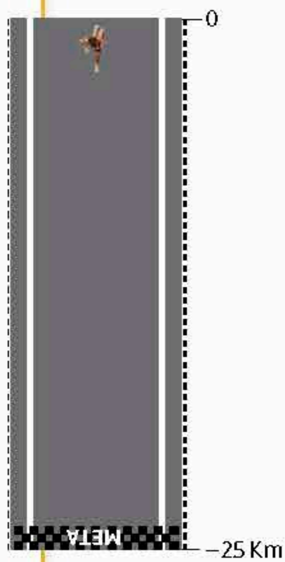
a) ¿Qué significado se le puede dar al signo negativo de los kilómetros que recorre? Explica tu respuesta.

b) Si realiza su entrenamiento en 2.5 horas, ¿cuántos kilómetros recorre en cada hora?

c) Explica tu procedimiento para obtener esta cantidad y el significado del signo de tu resultado.

d) En otro día decide ir de 0 a −9 km en una hora. ¿Cuántas horas ocupará para alcanzar su meta diaria de 0 a −25 km?

e) Explica tu procedimiento y el signo que debe tener el resultado. Argumenta tu respuesta.



L3 Multiplicación y división de números con signo

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
Don Salvador abrió un negocio de reparaciones eléctricas en el mercado de su colonia. En el balance del primer mes de operaciones se tiene un total de −$2 152.00.
   - **a)** El balance mensual reporta la misma cantidad que el primer mes (en promedio) y en cierto tiempo se llega a −$6 456.00. ¿Qué ha pasado con el negocio? ¿Cuántos meses pasaron para llegar a este total?
   - **b)** Armando, el hijo de Don Salvador, cambia de giro el negocio y ahora hace reparaciones de teléfonos celulares. A partir de ese momento, el balance mensual reportó cantidades de $1 614.00 (en promedio). ¿Qué significa esto para el negocio? ¿Cuántos meses pasarán desde la apertura del negocio hasta que se reporte un saldo total de $0.00?

INGRESOS	GASTOS
98	−220
100	−150
130	−300
100	−315
170	−850
160	−520
	−155
	−150
Total: 758	Total: −2910
Total mensual: −2152	

   - **c)** Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros.
   - **d)** ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   - **e)** Describe tu procedimiento para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Generalización de reglas de productos y cocientes

En las lecciones anteriores hemos trabajado con las reglas para multiplicar y dividir números con signo. Ahora las estableceremos de forma general.

1. Menciona el procedimiento para realizar las siguientes operaciones.
   - **a)** Multiplicación de dos números decimales, uno positivo y el otro negativo.
   - **b)** División de dos fracciones negativas.
   - **c)** División de una fracción negativa entre un entero positivo.
   - **d)** Producto de una fracción positiva por un decimal positivo.
   - **e)** Añade los casos que faltan e indica cómo será el resultado.

Portafolio P

Los fenómenos físicos se utilizan para ejemplificar las cantidades negativas. ¿Cómo ejemplificarías la multiplicación de dos números negativos? Piensa en dos vehículos que parten de un punto y viajan en línea recta pero en sentido contrario. ¿Puedes determinar dónde estaba cada vehículo tres horas antes de cruzarse?

f) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discute qué procedimientos se mantienen sin importar qué tipos de números sean.

2. Completa las operaciones para que sean ciertas.

a) $(-70) \div 5 =$ ______

b) $(-1.6) \times (-9) =$ ______

c) $(\_\_\_\_) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -9$

d) $(9.45) \div (\_\_\_\_) = 2.7$

e) $(\_\_\_\_) \times (+6) = -2.44$

f) $\left(\frac{3}{7}\right) \div (\_\_\_\_) = -\frac{9}{4}$

g) $(-7.5) \times (\_\_\_\_) = 3$

h) $\left(-1\frac{4}{5}\right) \times (\_\_\_\_) = -2$

i) $\left(\frac{3}{4}\right) \div (\_\_\_\_) = 125$

j) $(\_\_\_\_) \div \left(2\frac{1}{2}\right) = -1.7$

- ¿De qué manera encontraste el número faltante en los ejercicios?

______

______

- En los resultados cuyo signo es positivo, ¿qué procedimiento empleaste?

______

______

- ¿Qué procedimiento ocupaste en los resultados cuyo signo es negativo?

______

______

- Compara tus resultados con los que obtuvieron tus compañeros. En caso de discrepancia discutan sus procedimientos y modifiquen si es necesario.

Las **reglas para productos y cocientes de números enteros** son las siguientes:

1. Al multiplicar o dividir dos números del mismo signo, el resultado es un número positivo.

2. Al multiplicar o dividir dos números de distinto signo, el resultado es un número negativo.

Multiplicación

$a \times b = c$

$-a \times (-b) = c$

$a \times (-b) = -c$

$-a \times b = -c$

División

$a \div b = c$

$-a \div (-b) = c$

$a \div (-b) = -c$

$-a \div b = -c$

Donde a, b y c son enteros positivos y pueden ser también decimales o fraccionarios positivos. En el caso de la división b es distinto de 0.

Jerarquía de operaciones

En primer grado estudiaste la jerarquía de operaciones de números enteros, fraccionarios y decimales, para multiplicación y división, sólo positivos. Ahora, exploraremos dicha jerarquía con números con signo.

3. Reúnanse en equipo. Analicen la situación, discútanla y hagan lo que se pide.
Ana y Miguel resolvieron la operación: $-8 + 1 - 6 \times (-5) \div (-2)$. A continuación se muestran los pasos que hizo cada uno para obtener un resultado.

Ana	**Miguel**
$-8+1-6\times(-5)\div(-2)$	$-8+1-6\times(-5)\div(-2)$
$-8+1-(-30)\div(-2)$	$-7-6\times(-5)\div(-2)$
$-8+1-15$	$-13\times(-5)\div(-2)$
$-7-15$	$65\div(-2)$
-22	-32.5

a) ¿Cuál es la secuencia de operaciones con la que se obtiene el resultado correcto? ¿Por qué? ____________________

____

b) Calculen el resultado de $-8+1-6\times(-5)\div(-2)$. ¿Qué pasos siguieron? ____________________

____

____

c) ¿La jerarquía de operaciones que conocían es diferente a la de los números con signo? Expliquen. ____________________

____

d) Compartan con el grupo sus conclusiones. Si hay diferencias, argumenten y modifiquen de ser necesario.

4. A continuación se presentan varias operaciones. Escribe los paréntesis que hagan falta y calcula el resultado correcto de cada una.

a) $-2\times-6\div(-3)+9=$

b) $4-6\times3\div1=$

c) $-3.2\times5-10\div(-4)=$

d) $25\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{5}\div\frac{1}{2}=$

e) $-1.5+\frac{2}{5}\div\frac{1}{2}-0.8\times4=$

f) $\frac{1}{2}\div\frac{2}{5}\div\frac{1}{3}\div\frac{2}{3}=$

- ¿Qué criterio usaste para poner los paréntesis? ____________________

  ____

- Escribe en tu cuaderno una propuesta de jerarquía de operaciones para números enteros, fraccionarios y decimales en general.
- Reúnete en equipo y comparen y discutan sus propuestas de jerarquía de operaciones. Si hay discrepancias, argumenten y corrijan en caso necesario.
- En grupo, validen sus propuestas proponiendo algunos ejemplos de operaciones.

Conoce más

Para leer un artículo referente al "síndrome del paréntesis invisible", en el que se aplica la jerarquía de operaciones, entra a: http://www.edutics.mx/UDb. (Consulta: 20 de junio de 2018).

La **jerarquía de operaciones** se aplica de acuerdo con estos principios:

1. Se hacen las operaciones que se encuentran adentro de los paréntesis. En caso de que haya varios, o de que se utilicen corchetes o llaves, se resuelven del que se encuentre más al centro de la expresión hacia el que está afuera o hasta que ya no haya.
2. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.
3. Se resuelven las sumas y las restas.
4. Si hay operaciones de la misma jerarquía, se realizan de izquierda a derecha.

Problemas de productos y cocientes de números positivos y negativos

Practiquemos lo aprendido acerca de las multiplicaciones y las divisiones de números positivos y negativos.

5. Para las siguientes operaciones, escribe el signo $>$, $<$ o $=$ en el espacio, según corresponda.

a) $(-30) \div (+5)$ ____ $(-4) \div (-1)$

b) $(-2.5) \times (-0.4)$ ____ $(4.2) \times (0.5)$

c) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$ ____ $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{4}{7}\right)$ ____ $\left(-\frac{7}{4}\right) \div (2)$

e) $(-72) \div (+6)$ ____ $4 \times (-3)$

f) $(14) \times (0.5)$ ____ $(-28) \div (-0.7)$

g) $(-5) \times \left(\frac{1}{8}\right)$ ____ $\left(-\frac{1}{5}\right) \div (8)$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right) \div (0.25)$ ____ $(-2.4) \times \left(\frac{5}{6}\right)$

6. ¿Cuál es el número que multiplicado por -8 es igual a 96? ____________________

7. Cierto refrigerador puede disminuir la temperatura en su interior 4 °C cada 20 min. En cierto momento, hubo una falla de suministro eléctrico y la temperatura del refrigerador aumentó 2 °C para llegar a -18 °C. ¿Qué temperatura tenía el refrigerador cuando ocurrió la falla? ____________________

8. María juega con su hermana Norma a adivinar números con pistas. María dice que está pensando en un número tal que su tercera parte más 5 es igual a 3. Norma dice que no hay número que cumpla eso. ¿Tiene razón Norma? ¿En cuál número está pensando María? ____________________

9. Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y procedimientos. En caso de haber diferencias, argumenten y corrijan de ser el caso.

Conoce más

Para resolver más problemas relacionados con las operaciones de números con signo, entra a la dirección: http://www.edutics.mx/3Kb. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Glosario

Batisfera. Vehículo sumergible suspendido de un cable que permite explorar el fondo del mar.

Cierre

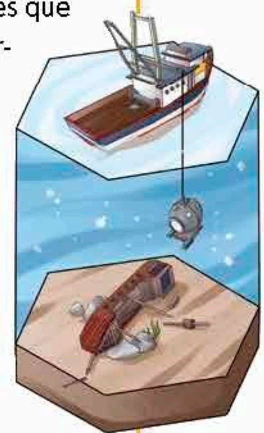
1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Una **batisfera** se sumerge en el mar de tal manera que la distancia que recorre cada minuto es constante.

a) Al transcurrir 13 min ha llegado a -39 m respecto al nivel del mar. ¿Cuántos metros desciende cada minuto?

b) ¿Respecto al nivel del mar, a qué punto llega después de media hora? ¿Y después de 2 h?

c) Describe los procedimientos que utilizaste para conocer estas cantidades. Comparte luego tus resultados con tus compañeros.



Piensa y sé crítico

Analiza las preguntas: ¿por cuál número debes multiplicar un número positivo para que el resultado sea el mismo número pero negativo? ¿Y por cuál un número negativo para que el resultado sea el mismo número pero positivo? Discute las respuestas con el grupo.

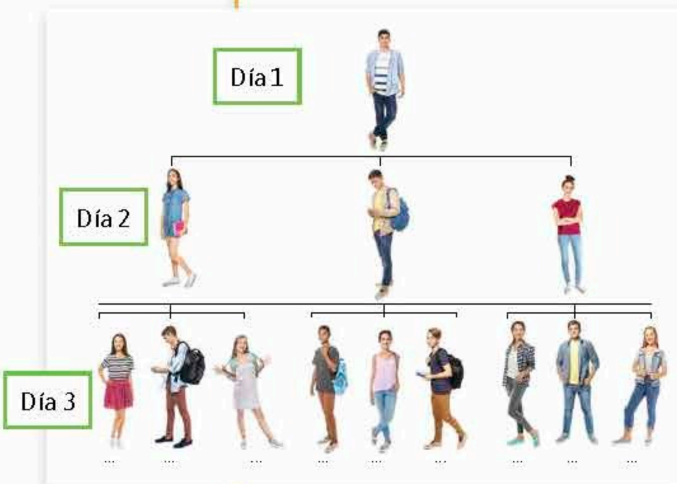
S4 Potencias con exponente entero

Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

L1 Productos de potencias enteras de la misma base

Inicio

1. Lee la situación y responde lo que se pide.
Daniel, un amigo de Sofía, diseño una aplicación para localizar amigos en un mapa. Para probarla pidió a tres personas que la descargaran, la usaran y que a la mañana siguiente la compartieran con otras tres personas y así sucesivamente.



a) ¿A cuántas personas le compartirán la aplicación las primeras tres personas?
b) ¿Con cuántas personas compartirán la aplicación ese número de personas?
c) Si Sofía descargó la aplicación en el décimo día ¿cuántas personas en total, incluyéndola a ella, la descargaron?
d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
e) Describe el procedimiento que hiciste para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Potencias enteras

Vamos a explorar los productos de un número por sí mismo varias veces. Éste puede ser entero, decimal o fraccionario.

1. Completa la tabla 1.11. Luego analiza la información que sigue y relaciónala con lo que hiciste para completar la tabla.

Notación
La multiplicación también se puede representar por un punto en medio:
$a \cdot a$
Y también con paréntesis:
$a(a) = (a)(a)$

Tabla 1.11

Producto	Número que se multiplica	Número de veces que se multiplica
$2 \times 2 \times 2 = 8$		
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$		
$(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = -1024$		
$0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.01024$		
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$		

A la operación de multiplicar un número varias veces por sí mismo se le llama **potenciación**. Al factor a que se multiplica varias veces por sí mismo se le llama **base**, al número de veces n que se multiplica la base se le llama **exponente** y al resultado se le llama **potencia**.

Notación

Cuando en una potencia el exponente es 2, se dice que está elevado al cuadrado; si el exponente es 3, se dice que está elevado al cubo.

2. Reúnanse en equipo y acuerden una estrategia y un procedimiento para completar la tabla 1.12. Usen calculadora.

Tabla 1.12

Potencia de	Desarrollo como producto	Base	Exponente	Resultado
2^4	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	2	4	16
$(0.2)^4$				
$\left(\frac{1}{5}\right)^5$				
$(-3)^3$				
$(-0.4)^4$				
$\left(-\frac{1}{6}\right)^5$				
0^{12}				
256^1				
1^{15}				

a) Discutan: ¿qué tipo de resultados, positivos o negativos, tienen las potencias de base positiva? ¿Por qué? ______________________________

____

b) Propongan en su cuaderno varias potencias con base negativa pero algunas con exponente par y otras con impar. ¿Qué signo tienen las potencias de base negativa? ¿De qué depende? ______________________________

____

c) En grupo, comparen sus respuestas. Si hay diferencias discutan sus procedimientos. Escriban una conclusión en su cuaderno.

3. Considera que a denota un número entero, decimal o fraccionario positivo o negativo. Escribe en tu cuaderno una expresión, como producto, de a^6, a^9 y a^{12}. ¿Cómo escribirías el producto de a^n, donde n es un número natural?

Se llama **potencia entera** a una expresión de la forma

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ veces}}$$

donde el exponente n es un número entero positivo. La base a puede ser un número entero, fraccionario o decimal, positivo o negativo.

Producto de potencias enteras con la misma base

Hay ocasiones en que es necesario multiplicar potencias enteras con la misma base. Ahora vamos a explorar cómo podemos hacerlo.

4. Responde lo que se pide.

a) Calcula 2^2 y 2^3 ______________________

b) Calcula $2^2 \times 2^3$ ______________________

c) Con base en lo anterior, desarrolla 2^5 ¿Cuál es su valor? ______________

d) ¿Cómo son los resultados de $2^2 \times 2^3$ y 2^5? ______________

e) Observa los exponentes de 2^2, 2^3 y 2^5. ¿Cómo obtendrías el exponente de 2^5 considerando los de 2^2 y 2^3? ______________

f) ¿Pasará lo mismo si cambias la base? ¿Y si cambias los exponentes? Escribe una **conjetura** respecto al inciso anterior. ______________

____

Glosario

Conjetura. Juicio que se forma de algo por indicios u observaciones.

5. Reúnanse en equipos y discutan cuales de las siguientes operaciones son correctas y porqué.

a) $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$ ______________

b) $2^3 \times 2^2 = 2^3 + 2$ ______________

c) $2^3 \times 2^2 = 2^3 \times 2$ ______________

6. Reúnanse en equipo y acuerden una estrategia y un procedimiento para completar la tabla 1.13. Usen calculadora.

Tabla 1.13

Producto de potencias $a^n \times a^m$	Desarrollo del producto	Expresión como potencia a^p
$5^4 \times 5^3$		
$(-3)^3 \times (-3)^5$		
$(0.5)^2 \times (0.5)^4$		
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$		

a) ¿Cómo se relacionan los exponentes n y m con el exponente p? ______________

____

b) Propongan una regla que permita calcular un producto de potencias con la misma base $a^n \times a^m$. Escriban también su expresión algebraica. ______________

____

c) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten sus resultados si hay diferencias y corrijan de ser necesario. Luego, hagan lo que se pide.

- Validen su regla con varios ejemplos. Escríbanlos en su cuaderno.

El **producto de potencias enteras de la misma base** se expresa, en forma simbólica, como

$$a^n \times a^m = \left(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ veces}}\right) \times \left(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{m \text{ veces}}\right) = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n+m \text{ veces}} = a^{n+m}$$

donde n y m son los el exponentes y a es la base.

Infomáticas

En matemáticas es importante tener notaciones que sean claras. Supón que un amigo te envía una parte de una tarea por correo electrónico y al momento de copiar y pegar el texto, éste aparece como: "Hay que encontrar el resultado de $a2a3$". Si sabes que el tema es de productos y potencias, ¿de cuántas maneras puedes interpretar $a2a3$?

Problemas de potencias enteras y productos de potencias

7. Calcula el resultado de las operaciones con potencias enteras.

a) $3^6 =$ ______________ e) $(-3)^6 =$ ______________

b) $(15-8)^5 =$ ______________ f) $90-3^4 =$ ______________

c) $(2.2)^4 =$ ______________ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 =$ ______________

d) $5^2-2^4 =$ ______________ h) $\frac{2^3}{3} =$ ______________

8. Responde.

a) ¿$(-4)^3$ da el mismo resultado que $-(4^3)$? ¿Y $(-5)^4$ da el mismo resultado que $-(5^4)$? Explica. ______________

b) Escribe una conjetura acerca de qué pasa en estos casos. ______________

9. En una tienda de autoservicio reciben 12 paquetes con 12 cajas de 12 botellas de aceite. ¿Cuántas botellas se reciben en total? Exprésalo como potencia. ______________

10. Calcula los siguientes productos.

a) $6^{14} \times 6^{12} =$ ______________ c) $(1.3)^4 \times (1.3)^8 =$ ______________

b) $(-3)^6 \times (-3)^3 =$ ______________ d) $\left(\frac{3}{5}\right)^9 \times \left(\frac{3}{5}\right)^7 =$ ______________

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Considera la situación de la actividad de inicio. Sofía comenta con otra amiga que si en el día dos hay 9 personas que han descargado la aplicación entonces en el día cuatro habrá 18 personas que también la descargaron porque este día es el doble del día dos y por lo tanto $9 \times 2 = 18$ ($3^2 \times 2 = 18$). Su amiga responde que no está de acuerdo y cree que en el día cuatro habrá 81 personas, ya que se multiplica la cantidad de personas del día dos (3^2) por otras 9 personas ($3^2 \times 3^2$) debido a que la información se comparte de tres en tres. ¿Quién de las dos amigas tiene razón? Explica.

L2 Potencia de una potencia entera

Inicio

1. Lee la situación y responde lo que se pide.
En un laboratorio de biología se tienen dos cultivos de bacterias en una caja de Petri cada una; en el primer caso la población inicial fue de 2^4 y en el segundo caso fue de 2^3. Una hora después, la población en el primer caso se ha elevado al cuadrado y en el segundo caso se observa que la cantidad de bacterias, respecto a la inicial, se ha elevado al cubo.

a) Después de la primera hora, ¿en cuál de los dos casos hay más bacterias?
b) Si al pasar otra hora el crecimiento de bacterias se da como en la primera hora, ¿en cuál de los dos casos hay más bacterias?
c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
d) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Potencias de potencias

¿Qué pasa cuando encontramos potencias de potencias? Exploremos cómo calcularlas.

1. Responde lo que se pide.
   a) Calcula 3^3 ______________________
   b) Calcula $(3^3)^2$ ______________________
   c) Calcula 3^6 ______________________
   d) Compara el resultado de los incisos b) y c). ¿Qué es lo que observas? __________
   ____
   e) ¿Por qué consideras que sucede eso? Haz una conjetura para explicarlo. __________
   ____
   f) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas, corrijan en caso de ser necesario.
2. Reúnanse en equipos y discutan cuáles de las siguientes operaciones son correctas y por qué.

La **potencia de una potencia entera** se refiere a elevar una potencia entera a^n a un exponente m, $(a^n)^m$, es decir, a^n se multiplica por sí misma el número de veces que indica el otro exponente m. Los números n y m son enteros positivos

   a) $(3^3)^2 = 3^3 + 3^2$ ______________________
   b) $(3^3)^2 = 3^3 \times 2$ ______________________
   c) $(3^3)^2 = 3^3 \times 3^3$ ______________________

3. Reúnanse en equipo y acuerden una estrategia y un procedimiento para completar la tabla 1.14. Usen calculadora.

Tabla 1.14

Potencia de potencia	Base a^n	Exponente m de la base	Desarrollo del producto	Expresión como potencia a^p
$(7^2)^4$	7^2	4	$(7^2)\times(7^2)\times(7^2)\times(7^2) =$ $7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$	7^8
$(6^3)^2$				
$((-2^3))^3$				
$((0.1)^2)^3$				
$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$				

a) ¿Cómo se relacionan los exponentes n y m con el exponente p? ______________________

____

____

b) Propongan una regla que permita calcular una de potencia de potencia con la misma base $(a^n)^m$. Escriban también su expresión algebraica. ______________________

____

____

____

c) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten sus resultados si hay diferencias y corrijan de ser necesario. Luego, hagan lo que se pide.
- Validen su regla con varios ejemplos. Escríbanlos en su cuaderno.

La **potencia de una potencia** entera se expresa, en forma simbólica, como

$$(a^n)^m = \Big(\underbrace{a^n\times a^n\times\cdots\times a^n\times a^n}_{m\ veces}\Big)$$

$$= \underbrace{\Big(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a}_{n\ veces}\Big)\times\Big(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a}_{n\ veces}\Big)\times\cdots\times\Big(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a}_{n\ veces}\Big)\times\Big(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a}_{n\ veces}\Big)}_{m\ veces}$$

$$= \underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a}_{n\times m\ veces} = a^{n\times m}$$

donde n y m son los exponentes (números enteros positivos) y a es la base.

Conoce más

Para observar la diferencia entre la potencia de una potencia y una potencia cuyo exponente es otra potencia, entra en http://www.edutics.mx/UDD. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Problemas de potencia de una potencia

Ahora vamos a practicar lo aprendido acerca de la obtención de potencias de una potencia.

4. Obtén los resultados de las siguientes operaciones.

a) $(2^2)^2 =$ ______ c) $(2^3)^2 =$ ______

b) $(2^2)^3 =$ ______ d) $(2^3)^3 =$ ______

- ¿Qué expresión es la mayor? ______
- Explica tu respuesta: ______

______

______

5. Calcula las potencias de potencias. Puedes usar calculadora.

a) $(3^2)^2 =$ ______ e) $((0.2)^5)^2 =$ ______

b) $(4^3)^4 =$ ______ f) $((0.5)^3)^6 =$ ______

c) $((-5)^3)^4 =$ ______ g) $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^4\right)^9 =$ ______

d) $((-4)^5)^4 =$ ______ h) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^3 =$ ______

6. Para las siguientes potencias de potencias, escribe los símbolos $<$, $>$ o $=$ según corresponda.

a) $(3^2)^6 \square (3^2)^3$ d) $((-3)^2)^2 \square (3^2)^2$ g) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 \square \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^3$

b) $(3^3)^2 \square (3^2)^3$ e) $((-3)^2)^2 \square -(3^2)^2$ h) $(0.4^4)^3 \square (0.4^5)^2$

c) $(3^3)^2 \square (3^3)^3$ f) $((-3)^3)^3 \square -(3^3)^3$ i) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^3 \square ((0.2)^3)^2$

7. Analiza las expresiones y subraya la que es mayor. Argumenta tu respuesta.

4×4^4 44^4 $4^4 \times 4^4$ $(4^4)^4$

______

______

______

______

8. Completa los recuadros para hacer cierta las igualdades.

a) $4^{\square} \times 4^{\square} \times 4^{\square} = (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^{\square}$

b) $(\square) \times (\square) \times (\square) = (4 \times 4)^{\square} = (4^{\square})^{\square} = 4^{\square}$

c) ¿Cómo son los resultados en a) y b)? Explica. ______

______

______

______

9. Considera la figura 1.11. Haz lo que se pide.

a) Escribe un procedimiento para calcular el volumen ____________

____

____

b) Escribe una expresión para calcular el volumen como una potencia de potencias. ____________________________

____

c) En la tabla 1.15 se dan distintas posibles medidas de la arista del cubo. Complétala.

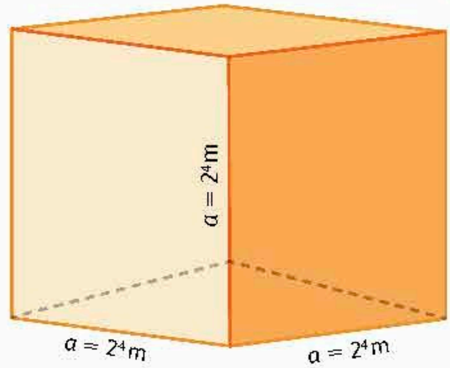


Figura 1.11. Cubo con las medidas de sus aristas.

Tabla 1.15

Medida de arista	Expresión para calcular volumen	Desarrollo del producto	Potencia resultado
4^2	$(4^2)^3$		
9^5			
$(-5)^3$			
$(2.3)^2$			
$\left(\frac{2}{3}\right)^2$			

d) Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas. En caso de diferencias, argumenten sus procedimientos. Corrijan si es necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. De acuerdo con las unidades de medida para la capacidad de almacenamiento de los dispositivos digitales, se tiene lo siguiente:

Bytes (B)	1 byte	1 kilobyte	1 megabyte	1 gigabyte	1 terabyte
Bits (b)	2^3 bits	2^{10} bits	2^{10} kilobits	2^{10} megabits	2^{10} gigabits

a) Propón un procedimiento para calcular cuántos bits tiene un megabyte.

b) Comprueba tu procedimiento. ¿Cómo lo harías?

c) ¿Cuántos bits hay en $(2^3)^2$ terabytes?

d) Investiga si existen unidades de almacenamiento mayores a las mencionadas y sus equivalencias; luego escribe en tu cuaderno algunos ejemplos de conversiones entre las unidades.

Glosario G

Bit. Unidad de medida de cantidad de información, equivalente a la elección entre dos posibilidades igualmente probables.

L3 Cociente de potencias enteras de la misma base

Inicio

Glosario G

Piseta. Es es un recipiente cilíndrico sellado con tapa rosca, que tiene un pequeño tubo con una abertura.

1. Analiza la situación y responde lo que se pide.
   En una bodega se tiene un contenedor industrial como el de la figura, lleno con agua destilada a su máxima capacidad. Se llenarán **pisetas** de diferentes capacidades para trasvasar el líquido.
   a) Determina el número de pisetas de 1 litro que se llenan con el líquido del contenedor.
   b) Si las pisetas son de 2 litros, ¿cuántas se pueden llenar?
   c) ¿Y si las pisetas son de 2^3 litros?
   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describe tus procedimientos para encontrar las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Cociente de potencias enteras

En el manejo de varias situaciones encontraremos que es necesario calcular divisiones que incluyen potencias. Exploremos cómo calcularlas.

1. Podemos considerar una fracción como una división. Así una fracción expresa el valor resultante de una división. Completa lo que se pide.
   a) Calcula $\frac{81}{27}$ y escribe el resultado como potencia. ______
   b) Escribe 81 y 27 como potencias. ______
   c) Escribe $\frac{81}{27}$ con potencias en el numerador y en el denominador. ______
   d) Escribe $\frac{81}{27}$ y su resultado con potencias. ______
   e) Compara los exponentes de la expresión que obtuviste. ¿Qué relación hay entre ellos? ______
   f) Repite lo anterior pero con la fracción $\frac{256}{64}$. ¿Qué observas? ______

2. Reúnanse en equipos y discutan cuáles de las siguientes operaciones son correctas y por qué.
   a) $\frac{8^5}{8^3} = 8^5 - 8^3$ ______
   b) $\frac{8^5}{8^3} = 8^{5-3}$ ______
   c) $\frac{8^5}{8^3} = 8^{5+3}$ ______

3. Reúnanse en equipo y acuerden una estrategia y un procedimiento para completar la tabla 1.16. Usen calculadora.

Tabla 1.16

Cociente de potencias $\frac{a^n}{a^m}$	Desarrollo del cociente	Resultado	Expresión como potencia a^p
$\frac{4^4}{4^2}$	$\frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{4 \times 4}$	16	4^2
$\frac{5^6}{5^3}$			
$\frac{(-5)^5}{(-5)^3}$			
$\frac{(0.2)^4}{0.2}$			
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$			

a) ¿Cómo se relacionan los exponentes n y m con el exponente p? ______________________

____

____

b) Propongan una regla que permita calcular un cociente de potencias con la misma base $\frac{a^n}{a^m}$. Escriban también su expresión algebraica. ______________________

____

____

c) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten sus resultados si hay diferencias y corrijan de ser necesario. Luego, hagan lo que se pide.

- Validen su propuesta con varios ejemplos. Escriban algunos.

____

____

El **cociente de potencias de la misma base** se expresa como

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \cdots a \times a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \times a \cdots a \times a}_{m \text{ veces}}} = \underbrace{a \times a \cdots a \times a}_{n-m \text{ veces}} = a^{n-m}$$

donde n y m son los exponentes que son enteros positivos; y a es la base que es un entero pero también puede ser decimal o fraccionario.

Portafolio P

¿Es cierta la siguiente expresión?

$$\frac{2^4}{(2^2 \times 2^2)} = 2^{4-2-2}$$

$$= 2^0 = 1$$

Explica las propiedades que hay que utilizar para llegar al resultado, escríbelas y anéxalas a tu portafolio.

Cociente de potencias enteras de la misma base y mismo exponente

Ahora analicemos un caso particular de un cociente de potencias enteras.

4. Reúnanse en equipo y acuerden la estrategia y los procedimientos para completar la tabla 1.17. Usen calculadora.

Tabla 1.17

Cociente de potencias $\frac{a^n}{a^n}$	Desarrollo del cociente	Resultado	Expresión como potencia a^p
$\frac{2^4}{2^4}$	$\frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2}$	1	2^0
$\frac{3^3}{3^3}$			
$\frac{(-6)^5}{(-6)^5}$			
$\frac{(0.5)^4}{(0.5)^4}$			
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\left(\frac{1}{2}\right)^6}$			

a) ¿Cómo se relacionan los exponentes n y n con el exponente p? ______

______

b) Propongan una regla que permita calcular un cociente de potencias con la misma base y mismo exponente $\frac{a^n}{a^n}$. Escriban también su expresión algebraica. ______

______

c) Calculen $a^0 \times a^4$, $a^0 \times a^5$, $a^0 \times a^6$ y $a^0 \times a^7$. ______

- ¿Qué concluyen acerca de a^0? ______

______

d) ¿Qué relación observan entre el cociente de potencias con la misma base y el mismo exponente y una potencia con exponente cero? ______

______

e) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten sus resultados si hay diferencias y corrijan de ser necesario. Luego, hagan lo que se pide.

- Validen su regla con varios ejemplos. Escríbanlos en su cuaderno.

Si la base a de una potencia es distinta de cero, entonces se cumple que

$$a^0 = 1$$

Problemas de cociente de potencias

Practiquemos lo aprendido acerca de cocientes de potencias.

5. Considera la figura 1.12.

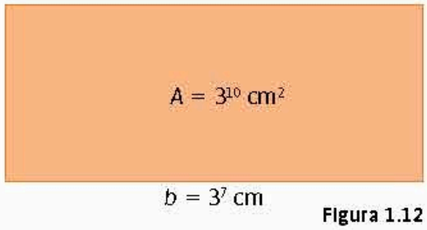


Figura 1.12

a) Propón un procedimiento para calcular la altura del rectángulo. ____________________

____

____

b) ¿Cuánto mide la altura? ____________________

c) Si la altura del rectángulo fuera de 4^4 m y el área de 4^9 m^2, ¿cuál sería la medida de la base? ____________________

d) Escribe tu procedimiento para responder. ____________________

____

____

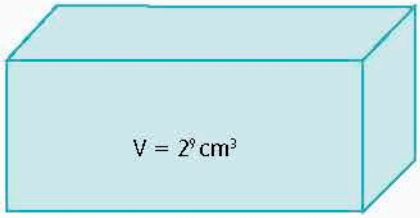


Figura 1.13

6. Hilario guardará cajas en una de mayor tamaño (figura 1.13). Completa la tabla 1.18 para saber cuántas cabrán.

Tabla 1.18

Volumen de cajas pequeñas	Expresión como potencia	Cociente	Operación con exponentes	Número de cajas pequeñas
4 cm^3	2^2 cm^3	$\frac{2^9}{2^2}$	2^{9-2}	$2^7 = 128$
16 cm^3				
2 cm^3				
1 cm^3				
64 cm^3				
512 cm^3				

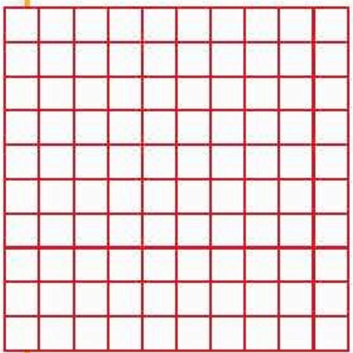
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Una granja dedicada a la venta de huevo cargó una camioneta con nueve cajas de producto, cada una con 243 huevos.
   a) ¿Cuántos huevos se tienen en total? Resuelve con y sin usar potencias.
   b) Si los huevos se llevan a una empresa empacadora, en donde se acomodan en empaques con capacidad de 30 huevos cada uno, ¿cuántos empaques se ocuparán? Resuelve con y sin usar potencias.
   c) ¿Qué procedimiento te resultó más sencillo? ¿Por qué?

L4 Potencias con exponente negativo y notación científica

Inicio

1. Lee la situación y responde lo que se pide.



Se tiene un cuadrado rojo con área $A = 10^2$ m^2 y se quiere segmentar en 10^3 cuadritos.

a) ¿Cuánto mide el área de cada cuadrito?

b) ¿Puedes escribir el área de cada cuadrito en forma de potencia? ¿Cómo?

c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

d) ¿Cuál fue tu procedimiento para saber las respuestas?

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Potencias con exponente negativo

Ahora abordaremos el caso en el que, en un cociente de potencias, el exponente del denominador es mayor que el del numerador.

1. Completa lo que se pide.

a) Escribe $\frac{64}{256}$ como un cociente de potencias y su resultado también como potencia.

____

b) Compara los exponentes de la expresión que obtuviste. ¿Qué relación hay entre ellos? ____

2. Reúnanse en equipo y acuerden una estrategia y un procedimiento para completar la tabla 1.19. Usen calculadora.

Tabla 1.19

Cociente de potencias $\frac{a^n}{a^m}$	Desarrollo del cociente	Resultado	Expresión como potencia
$\frac{4^2}{4^4}$			
$\frac{5^3}{5^6}$			
$\frac{(-3)^3}{(-3)^5}$			
$\frac{0.6}{0.6^4}$			
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$			

a) ¿Cómo se relacionan los exponentes n y m y el exponente del denominador de la expresión como potencia? ______________________________

____

b) Propongan una regla que permita calcular un cociente de potencias $\frac{a^n}{a^m}$ cuando $m > n$. Escriban también su expresión algebraica. Analicen qué valores puede tomar a^m. ______________________________

____

c) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten sus resultados si hay diferencias y corrijan de ser necesario. Luego, hagan lo que se pide.

• Validen su regla con varios ejemplos. Escríbanlos en su cuaderno.

3. Valida la regla del inciso b) actividad 2 completando la tabla 1.20.

Una expresión del tipo $\frac{1}{a^n}$, con a distinto de 0, se puede denotar como a^{-n}. Por ejemplo la fracción $\frac{1}{4^2}$ se puede escribir como 4^{-2}, es decir, $\frac{1}{4^2} = 4^{-2}$.

Tabla 1.20

Cociente de potencias $\frac{a^n}{a^m}$	Resultado como fracción	Operación entre exponentes	Resultado como potencia
$\frac{4^2}{4^4}$	$\frac{1}{4^2}$	4^{2-4}	4^{-2}
$\frac{5^3}{5^6}$			
$\frac{(-3)^3}{(-3)^5}$			
$\frac{0.6}{0.6^4}$			
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$			

a) ¿Qué relación encuentras entre el exponente del denominador de la expresión como fracción y el exponente negativo del resultado como potencia? ______________

____

____

b) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas.

4. Reúnanse en equipos y discutan cuáles de las siguientes operaciones son correctas y por qué.

a) $\frac{6^3}{6^5} = 6^5 - 6^3$ ______

b) $\frac{6^3}{6^5} = 6^{3-5}$ ______

c) $\frac{6^3}{6^5} = \frac{1}{6^{3-5}}$ ______

d) Consideren la regla del inciso b) actividad 2. Escriban la expresión algebraica incluyendo la notación a^{-n}. ______

Reglas generales para potencias con exponente entero

Ahora vamos a practicar las reglas vistas para desarrollar potencias.

5. Calcula el resultado de las operaciones con potencias.

a) $3^6 \times 3^9 =$ ______

b) $(1^5 \times 2^3)^5 =$ ______

c) $((2.2)^4)^3 =$ ______

d) $\frac{3^2}{3^6} =$ ______

e) $(-3)^0 =$ ______

f) $((-2)^5)^4 =$ ______

g) $\frac{5^7}{5^4} =$ ______

h) $\frac{2^3 \times 2^7}{(2^3)^4} =$ ______

Para cualesquiera base a y exponentes m y n se cumple que $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $a^1 = a$ y $1^n = 1$.

Para una base a distinta de 0, se cumple que $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ y $a^0 = 1$.

Conoce más

Para saber más acerca de potencias con exponente negativo, entra en http://edutics.mx/w8P.

Para saber más acerca de las leyes de los exponentes, entra en http://edutics.mx/w8W.

Para encontrar juegos de potencias consulta: http://www.edutics.mx/3Rq. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Notación científica

Una aplicación particular de potencias es el uso de la notación científica para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

6. Reúnanse en equipo. Coloquen el punto decimal en las expresiones para que todas sean iguales a...

a) 13 572 469.

- 1 3 5 7 2 4 6 9 $\times 10^1$
- 1 3 5 7 2 4 6 9 $\times 10^2$
- 1 3 5 7 2 4 6 9 $\times 10^3$
- 1 3 5 7 2 4 6 9 $\times 10^4$
- 1 3 5 7 2 4 6 9 $\times 10^5$
- 1 3 5 7 2 4 6 9 $\times 10^6$

b) 0.00000003487.

- 0 0 0 0 0 3 4 8 7 $\times 10^{-1}$
- 0 0 0 0 0 3 4 8 7 $\times 10^{-2}$
- 0 0 0 0 0 3 4 8 7 $\times 10^{-3}$
- 0 0 0 0 0 3 4 8 7 $\times 10^{-4}$
- 0 0 0 0 0 3 4 8 7 $\times 10^{-5}$
- 0 0 0 0 0 3 4 8 7 $\times 10^{-6}$

c) ¿Qué observan acerca de la posición del punto decimal y el exponente de la base 10?

______

______

La **notación científica** es una manera de representar un número utilizando potencias de base 10. La forma general de un número en notación científica es $a \times 10^n$, donde a es mayor que 0 y menor que 10, y n es un número entero. Por ejemplo, 30 000 000 se expresa como 3×10^7 y 0.00000001 se expresa como 1×10^{-8}.

7. Individualmente completa la tabla 1.21.

Tabla 1.21			
Cantidad	Notación desarrollada	Lugares que se recorre el punto decimal	Notación científica
Población de México en 2015	125 900 000 hab		1.259×10^8
Tamaño promedio de una bacteria	0.0000005 m		5×10^{-7}
Circunferencia de la Tierra	40075000 m		
Peso de una hoja de papel	0.0623 kg		
Diámetro de un grano de arena	0.0000632 m		

a) Propón un procedimiento para escribir cantidades muy grandes o muy pequeñas en notación científica. ______________________________

____

____

8. Expresa los números de notación científica en notación desarrollada.

a) 3.7×10^{11} = ______________________________

b) 2.25×10^{-9} = ______________________________

9. Beatriz ha escrito el número 0.256×10^8 y dice que en notación desarrollada es 25 6000 000. ¿Son correctas las escrituras de los números? ¿Por qué? ______________________________

____

10. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario. Validen sus operaciones con calculadora.

Glosario

Notación desarrollada. Expresión de un número en la que se incluyen todas sus cifras.

Conoce más

Para saber más de cómo expresar un número en notación científica, entra en http://edutics.mx/w8m. (Consulta: 20 de septiembre de 2018)

Portafolio

Busca imágenes de objetos muy grandes o muy pequeños, investiga sus dimensiones y realiza un cuadro comparativo donde los ordenes por su tamaño.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En una entrevista radiofónica, un astrónomo mencionó que, como una primera estimación, el número de estrellas en una galaxia es aproximadamente 10^{11} y que el número aproximado de galaxias en el universo es de 10^{12}. ¿Cuál es el número estimado de estrellas?

Piensa y sé crítico

Hay organizaciones que invitan a personas a participar en pirámides que involucran dinero, con la promesa de que en poco tiempo recibirán una gran cantidad. Juan invita a otras diez a participar dando dinero en un esquema piramidal. Cada persona debe invitar a otras 10 y así sucesivamente. Si cada persona da \$1.00 a quién lo invitó, ¿cuánto recibe Juan si su pirámide tiene 10 niveles? ¿Cuántas personas estarían involucradas? ¿Piensas que eso es posible? ¿Piensas que es un fraude? Argumenta tus respuestas.

¿QUÉ TAN GRANDE ES GRANDE?

Hay procesos cuantificables y objetos cuyas medidas son tan grandes que parecen inimaginables para el razonamiento humano, a pesar de ello, su representación y dimensión siempre resultarán irrelevantes al compararlas con el infinito.

Número de estrellas del Universo
3×10^{22}

Grandes magnitudes

Las magnitudes asombrosas están en todas partes; por ejemplo, la masa de la pirámide de Giza en Egipto, el radio terrestre o el diámetro del universo observable, así como de acciones difíciles de cuantificar como las posibles combinaciones del cubo de Rúbik o el del número de movimientos que se pueden realizar en cierto número de jugadas de ajedrez nos ayudan a dimensionar que tan grande es lo grande.

Combinaciones del cubo Rubik
4.32×10^{19}

Litros de agua de los Grandes lagos (EUA-Canadá)
6×10^{13}

El googol

El googol o gúgol (en español) es el nombre que recibe un número bautizado por un niño de 9 años, sobrino del matemático Edward Kasner para ilustrar la diferencia entre un número inimaginablemente grande y el infinito. A partir de esta idea Kasner planteó la siguiente equivalencia.

1 googol = 10^{100}

El googolplex

Es otro número propuesto por Kasner, y bautizado por su sobrino, para imaginar un número mucho más grande que el googol, es decir:

1 googolplex = 10^{googol}

Cabellos promedio en cabeza humana
10^5

Radio de la Tierra
6.371×10^6 m

Gramos de peso ballena azul
12×10^8 g

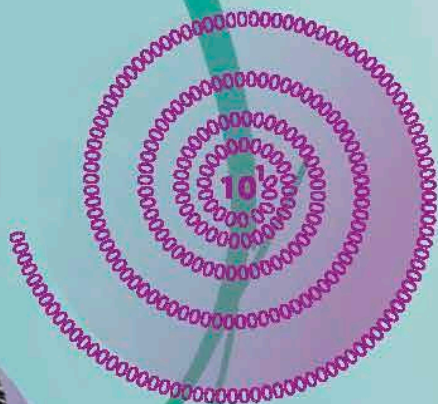
Diámetro del universo observable
1.37×10^{26} m

Átomos en el universo observable
10^{80}

Número googolplex

$$10^{10^{100}}$$

Número googol
10^{100}



Movimientos posibles en 80 jugadas en ajedrez
$30^{80} \approx 10^{120}$

Número de células en nuestro cuerpo
6×10^{13}

Peso de la Pirámide de Guiza
6×10^{9} kg

Analiza y resuelve.

- Si escribieras un dígito por centímetro, uno seguido de otro, ¿qué longitud tendría el número googol en kilómetros? Considera que 1 km = 10^5 cm.
- ¿Cuánto tardaría un haz de luz en recorrer de lado a lado un universo cuyo diámetro fuera de 10^{100} km? Considera que la velocidad de la luz es $V = 1.079 \times 10^9$ km/h

S5 Raíces cuadradas

Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

L1 Significado de la raíz cuadrada

Inicio

1. Lee la situación y responde lo que se pide.

   Pablo hace cajas de cartón para empacar diversos objetos, pero...

   a) un cliente le pide cajas cuadradas para empacar 25 canicas de vidrio en cada una. Si cada canica mide 1 cm de diámetro, ¿qué medidas debe tener la caja?

   b) Luego, el mismo cliente le pide cajas cuadradas para empacar, en cada una, 196 canicas de vidrio de 1 cm de diámetro. ¿Qué medidas debe tener la caja?

   c) Finalmente, el cliente le pide cajas para empacar 41 canicas, pero en dos cajas distintas. ¿Qué medidas deben tener las cajas?

   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

   e) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

La raíz cuadrada y la potencia cuadrada

Vamos a introducir la relación que hay entre la raíz cuadrada y la potencia con exponente 2.

1. La figura 1.14 muestra un campo de juegos. Una región del mismo se dividió para realizar un tablero gigante de ajedrez. Cada casilla mide 1 m por lado.

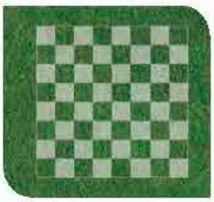


Figura 1.14. Tablero de ajedrez.

   a) ¿Cuál es el área del tablero de ajedrez? __________

   b) ¿Cuál es la medida de los lados del tablero? __________

   c) Escribe la medida del área como una potencia. __________

   d) Compara tus respuestas a los incisos b) y c). ¿Qué observas? __________

2. Ricardo es un contratista y hará los acabados de una casa. En un local de materiales para construcción vio unas losetas cuadradas que le gustaron. Las medidas de las losetas son de 20×20 cm, 25×25 cm y 30×30 cm.

   a) ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado? Escribe la fórmula para calcular el área de un cuadrado. Usa potencias. __________

   b) ¿Cuál es el área de cada tipo de loseta? __________

   c) Expresa el área de cada tipo de loseta como una potencia. __________

3. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder lo que se pide.

Ricardo preguntó en servicio al cliente si le podían fabricar losetas con medidas especiales, a lo cual le respondieron que sí. Él requiere tres tipos de losetas, cada uno con área de 100 cm^2, 225 cm^2 y 2500 cm^2, respectivamente.

a) ¿Cómo calcularían el lado de un cuadrado conociendo su área? ______

______

______

b) ¿Cuánto miden los lados de cada tipo de loseta? ______

c) Expresa el área de cada tipo de loseta como una potencia. ______

4. Considera un cuadrado cuyos lados miden 16 unidades.

a) ¿Qué número multiplicado por sí mismo es igual a 256? ______

b) Si el cuadrado se agranda hasta que sus lados midan 25 unidades, ¿qué número multiplicado por sí mismo es igual a 625? ______

c) Si el cuadrado se reduce hasta que sus lados midan 9 unidades, ¿qué número multiplicado por sí mismo es igual a 81? ______

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo.

Notación

Elevar al cuadrado un número a significa multiplicarlo por sí mismo:

$a \times a = a^2$

La **raíz cuadrada** de un número a es otro número b tal que el resultado de multiplicarlo por sí mismo es igual al número original, es decir, $b \times b = a$. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 9 es 3, porque $3 \times 3 = 3^2 = 9$.

La **raíz cuadrada** b de un número a positivo se denota como $\sqrt{a} = b$ y tiene la propiedad de que $b^2 = a$. El símbolo $\sqrt{}$ se llama radical.

5. Reúnanse en equipo. Establezcan la estrategia y procedimientos para responder lo que se pide. Completen la tabla 1.22 y luego respondan.

Tabla 1.22

a	a^2	$\sqrt{a^2}$
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

a) ¿Qué ocurre si se eleva al cuadrado un número positivo y luego se calcula su raíz cuadrada? ______

______

______

b) ¿Qué concluyen acerca de las operaciones?

______

______

c) Propongan ejemplos de números cuya raíz cuadrada es un número natural. Expliquen por qué lo son. ______

Infomáticas

En 1525, el matemático alemán Chistoph Rudolff, usó símbolo √ en su libro de texto sobre álgebra para indicar una raíz cuadrada. En 1637, el matemático, físico y filósofo francés, René Descartes añade una barra superior: $\sqrt{}$

Se dice que un número cuya raíz cuadrada es un número natural es un **cuadrado perfecto**, es decir, que los números naturales al cuadrado son números cuadrados perfectos. Por ejemplo, 484 es un cuadrado perfecto, pues $22^2 = 484$ o bien $\sqrt{484} = \sqrt{22^2} = 22$.

d) Comparen las respuestas con las de sus compañeros. Argumenten sus resultados y corrijan de ser necesario.

6. Individualmente completa la tabla 1.23. Luego, reúnanse en equipo y respondan lo que se pide. Discutan sus ideas.

Tabla 1.23

a	16	36	64	100	144	169	225
$b = \sqrt{a}$	4						
b^2	$4^2 = 16$						
$(\sqrt{a})^2$	$(4)^2 = 16$						

a) ¿Cómo son los resultados del primero y tercer renglón? ____________

b) ¿Cómo es b^2 con respecto a a? ____________

c) ¿Cómo son los resultados del tercero y cuarto renglón? ____________

d) ¿Cómo es $(\sqrt{a})^2$ con respecto a b^2? ____________

e) Escribe una expresión que relacione a a con $(\sqrt{a})^2$. Considera que a es un número positivo. ____________

Conoce más

Para saber más acerca de los números cuadrados perfectos, entra en http://edutics.mx/3Rw. (Consulta: 20 de junio de 2018).

f) En grupo y con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. En caso de haber discrepancias argumenten y corrijan de ser necesario.

7. Reúnanse en equipo. Hagan lo que se pide.

a) ¿En qué caso es cierto que $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$? Propongan algunos ejemplos o contraejemplos y luego expliquen su respuesta. ____________

____

8. Considera un cuadrado con área $A = 49\text{ cm}^2$.

a) ¿Qué longitud tiene el lado del cuadrado? Explica cómo lo encontraste. ____________

____

b) ¿Qué relación existe entre el lado en función el área del cuadrado? ____________

____

c) ¿Qué relación existe entre el área en función el lado del cuadrado? ____________

____

d) ¿Qué relación hay entre la pregunta b) y la pregunta c)? ____________

____

e) ¿En qué caso es el área un cuadrado perfecto? ____________

____

U1

Problemas de raíces cuadradas

9. Completa las expresiones.

a) Si $16 = 4^2$ entonces $\sqrt{\square} = 4$

b) Si $25 = \square^2$ entonces $\sqrt{25} = \square$

c) Si $81 = \square^2$ entonces $\sqrt{\square} = \square$

d) Si $49 = \square^2$ entonces $\sqrt{\square} = \square$

10. Calcula la raíz cuadrada en cada caso. Analiza el ejemplo.

a) $\sqrt{400} = \sqrt{20 \times 20} = \sqrt{20^2} = 20$

b) $\sqrt{529} =$

c) $\sqrt{784} =$

11. Determina si los números dados son cuadrados perfectos.

a) 120 ______________

b) 289 ______________

12. Usa las propiedades de las potencias para calcular las raíces. Observa el ejemplo.

a) $\sqrt{3^8} = \sqrt{(3^4)^2} = 3^4 = 81$

b) $\sqrt{8^6} =$ ______________

c) $\sqrt{7^4} =$ ______________

d) $\sqrt{15^6} =$ ______________

e) $\sqrt{25^2} =$ ______________

f) $\sqrt{17^8} =$ ______________

13. Calcula las raíces cuadradas. Observa el ejemplo.

a) $\sqrt{2^2 \times 3^2} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$

b) $\sqrt{3^2 \times 5^2} =$ ______________

c) $\sqrt{2^4 \times 3^4} =$ ______________

Conoce más

Para repasar acerca del método tradicional de cálculo de raíces cuadradas, visita la página: http://www.edutics.mx/UrX. (Consulta: 20 de junio de 2018).

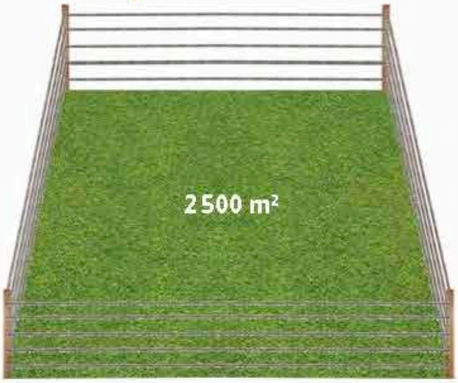
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Imagina que eres el encargado de reforestar dos terrenos con forma cuadrada. Has formado dos equipos de jardineros, uno para cada terreno, para que planten 1 753 arbolitos en total. Te han pedido un reporte sobre el número de arbolitos sembrados en cada terreno y hablas por teléfono a los equipos. El primero te informa que sembró 27 arbolitos por lado del terreno, con una separación de 1 m entre cada uno. El otro equipo no te responde la llamada.
   a) ¿Cuántos arbolitos hay en cada lado del otro terreno?
   b) ¿Cuánto miden los lados de los dos terrenos?
   c) ¿Cuál es el área total de los terrenos?

L2 Aproximación de raíces cuadradas

Inicio

1. Lee la situación y responde lo que se pide.



Se cercará el perímetro de un terreno de forma cuadrada. Primero se colocarán postes color café y luego se fijarán cinco hilos de alambre de acero para hacer la barda.

a) ¿Cuántos metros de alambre se necesitan? Si el alambre viene en rollos de 150 m, ¿cuántos rollos se requieren?

b) También se cercará un terreno cuadrado de 3 000 m^2. ¿Cuántos rollos de alambre se necesitan?

c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

d) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Maneras de aproximar de raíces cuadradas

Exploremos cómo aproximar la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto.

La parte entera de la raíz cuadrada

1. Completa la tabla 1.24. Aproxima cada raíz cuadrada a la parte entera de su valor. Usa calculadora.

Tabla 1.24

Número a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Aproximación entera de $\sqrt{a}$	1	1													

a) ¿Cuántos y cuáles números se aproximan al valor de su raíz cuadrada con el número 1? ______

b) ¿Cuántos y cuáles números se aproximan al valor de su raíz cuadrada con el número 2? ______

c) ¿Cuántos y cuáles números se aproximan al valor de su raíz cuadrada con el número 3? ______

d) ¿Cuál es la parte entera de la raíz cuadrada de 16 al 24? ______

e) Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y argumenten. Corrijan de ser necesario. Luego respondan:

- ¿Qué caracteriza a los números 1, 4 y 9 donde comienza cada secuencia de valores de la parte entera de la raíz cuadrada? ______
- Propongan un procedimiento para calcular la parte entera de la raíz cuadrada de un número. ______

Raíz entre dos números

2. Determina entre qué números naturales está $\sqrt{6}$. Haz lo que se pide.

a) En el recuadro de la derecha (figura 1.15) se muestra un cuadrado de área 6 u². Traza dos cuadrados: uno debe ser el cuadrado más grande posible que esté contenido en el cuadrado de 6 u² con una medida de sus lados igual a un número natural; y otro que sea el cuadrado más pequeño que contenga al cuadrado de 6 u² y con una medida de sus lados también igual a un número natural. Todos deben tener un vértice común.

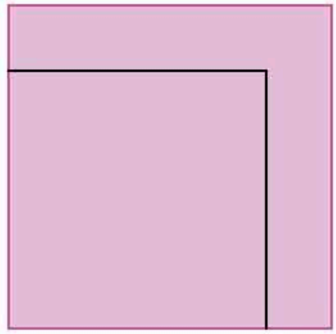


Figura 1.15

b) ¿Cuánto miden los lados del cuadrado de área 6 u²? ____________

c) ¿Cuál es el área del cuadrado menor? ¿Cuánto miden sus lados? ____________

d) ¿Cuál es el área del cuadrado mayor? ¿Cuánto miden sus lados? ____________

e) ¿Qué característica tienen los valores de las áreas de los cuadrados? ____________

f) Ordena las áreas y las medidas de los lados.

Áreas: ____ < ____ < ____ Lados: ____ < ____ < ____

g) ¿Qué observas? ____________

____

h) Escribe un procedimiento para determinar entre qué números se localiza una raíz cuadrada. ____________

____

____

i) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenta tus resultados y corrige de ser necesario.

Conoce más

Te recomendamos el libro: *El imperio de los números*, de Denis Guedj, en el cual conocerás una historia de los diferentes tipos de números que usamos en la actualidad. Búscalo en tu biblioteca del aula.

3. Aproxima $\sqrt{6}$ con números decimales. Haz lo que se pide.

a) Completa la tabla 1.25.

Tabla 1.25

a	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
a^2	4	4.41									

b) ¿Cuáles son los números decimales cuyos cuadrados son más cercanos a 6?

____

• Con los números de la tabla 1.25 completa la proposición.

Si ____ $< 6 <$ ____, entonces ____ $< \sqrt{6} <$ ____

c) ¿Cómo aproximarías $\sqrt{6}$ con números decimales, pero con dos cifras decimales?

____

____

• Escribe una aproximación de $\sqrt{6}$. ____________

____

d) Calcula $\sqrt{6}$ con calculadora. Compara este resultado con las aproximaciones anteriores. ¿Qué observas? ______________________________

____

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenta tus resultados y corrige de ser necesario.

1

2

3

Método babilónico

4. Aproxima el valor de $\sqrt{15}$. Haz lo que se pide.

a) En el recuadro 1 bosqueja un rectángulo cuya área sea 15 u^2 pero donde las medidas de sus lados sean dos números naturales lo más próximos entre sí. ¿Cuáles son estos números?

____

b) Suma el valor de los lados del rectángulo y divídelo entre 2. ¿Cuál es el resultado? ______________________________

c) En el recuadro 2 bosqueja otro rectángulo cuya área sea 15 u^2 pero uno de sus lados mida el valor que obtuviste en el inciso b). ¿Cuál es la medida del otro lado? ______________________________

d) Suma el valor de los lados del nuevo rectángulo y divídelo entre 2. ¿Cuál es el resultado? ______________________________

e) Usa tu calculadora para saber el valor de $\sqrt{15}$ y compáralo con tu resultado del inciso d). ¿Qué observas? ______________________________

f) En el recuadro 3 bosqueja otro rectángulo cuya área sea 15 u^2 y uno de sus lados mida el valor que obtuviste en el inciso d). Luego suma el valor de los lados del nuevo rectángulo y divídelo entre 2. Compáralo con el valor de $\sqrt{15}$.

g) ¿Qué ocurre con los rectángulos a medida que calculas el nuevo lado? ______________________________

____

Conoce más

Para saber más acerca del método babilónico para aproximar raíces cuadradas, entra en http://edutics.mx/3Ru. (Consulta: 20 de junio de 2018).

h) Escribe un procedimiento para aproximar raíces cuadradas. ______________________________

____

____

i) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenta tus resultados y corrige de ser necesario.

Raíz cuadrada con escuadra y compás

5. Aproxima el valor de $\sqrt{15}$. Haz lo que se pide en tu cuaderno.

a) Traza un segmento AB de 15 cm. Luego localiza su punto medio, C.

b) Traza una media circunferencia con centro en C y diámetro AB.

c) A partir del punto A mide 1 cm sobre AB; marca y denota este punto como D.

d) Traza un segmento perpendicular a AB que pase por el punto D y que corte a la media circunferencia. Denótalo como E.

e Une los puntos E y A con un segmento. ¿Cuánto mide? ______________________

f) Usa tu calculadora para obtener el valor de $\sqrt{15}$ y compáralo con tu resultado del inciso e). ¿Qué observas? ______________________

g) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenta tus resultados y corrige de ser necesario.

Problemas de aproximación de raíces cuadradas

Ahora vamos a practicar lo aprendido sobre la aproximación de raíces cuadradas.

6. Calcula la parte entera de cada raíz cuadrada.

a) $\sqrt{18}$ ______ b) $\sqrt{21}$ ______ c) $\sqrt{28}$ ______ d) $\sqrt{30}$ ______

7. En cada caso, determina dos números enteros consecutivos entre los que se encuentre la raíz cuadrada dada. Analiza el ejemplo.

a) $4 < \sqrt{18} < 5$

c) $\square < \sqrt{28} < \square$

b) $\square < \sqrt{21} < \square$

d) $\square < \sqrt{30} < \square$

Infomáticas I

Haz la suma $1\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$

Usa tu calculadora para obtener $\sqrt{2}$ y compáralo con el resultado de la suma. ¿Qué observas?

8. Completa las afirmaciones para que sean ciertas. Analiza el ejemplo.

a) Como $1 < 2 < 4$ entonces $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$, es decir, $1 < \sqrt{2} < 2$.

b) Como $\square < 5 < 9$ entonces $\sqrt{\square} < \sqrt{\square} < \sqrt{9}$, es decir, $\square < \sqrt{5} < \square$.

c) Como $\square < 28 < 36$ entonces $\sqrt{\square} < \sqrt{\square} < \sqrt{36}$, es decir, $\square < \sqrt{28} < \square$.

9. Aproxima el valor de cada raíz cuadrada. Usa una cifra decimal.

a) $\sqrt{56}$ _____ c) $\sqrt{83}$ _____ e) $\sqrt{126}$ _____ g) $\sqrt{175}$ _____

b) $\sqrt{70}$ _____ d) $\sqrt{110}$ _____ f) $\sqrt{152}$ _____ h) $\sqrt{210}$ _____

10. Aproxima el valor de cada raíz cuadrada. Usa dos cifras decimales.

a) $\sqrt{7}$ = _____ b) $\sqrt{10}$ = _____ c) $\sqrt{12}$ = _____

11. Ordena los números de mayor a menor.

a) $\sqrt{3}$, 0.003, 0.3 y 3 ______________________

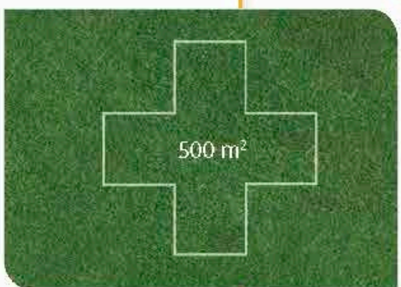
b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, 0.2, $(0.2)^2$ y 2 ______________________

12. Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y procedimientos a los problemas. Validen con ayuda de una calculadora. Corrijan de ser necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. En un terreno se marca una región en forma de cruz regular para indicar una zona de aterrizaje de helicópteros. ¿Cuál es su perímetro?



L3 Cuadrados y raíces cuadradas

Inicio

1. Lee la situación y responde lo que se pide.

La pared de una cisterna de concreto con forma de cubo tiene un área de 25 m^2. A Isabel y Rodrigo se les pide calcular la profundidad a la que se encuentra el piso de la cisterna. Isabel concluye que está a -5 m y Rodrigo dice que está a 5 m. Para verificar su resultado, cada uno lo elevó al cuadrado.

a) ¿Qué resultado obtuvieron ambos al elevar al cuadrado sus resultados?
b) ¿Quién obtuvo el resultado correcto? Explica.
c) ¿Qué puedes decir respecto a la raíz cuadrada de 25?
d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
e) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Raíces de números positivos

Exploremos una característica de la raíz cuadrada de un número positivo.

1. Reúnanse en equipo. Establezcan la estrategia y procedimientos para responder lo que se pide. Completen las tablas 1.26, 1.27 y 1.28.

Tabla 1.26

Número a	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-7	7
a^2	4	4										

Tabla 1.27

Número a	-0.1	0.1	-0.2	0.2	-0.3	0.3	-0.4	0.4	-0.5	0.5	-0.6	0.6
a^2	0.01	0.01										

Tabla 1.28

Número a	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
a^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$										

a) ¿Qué observan en las tres tablas? ______________________________
____
____

b) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene el número 4? ¿Y el número 0.01? ¿Y el $\frac{1}{4}$? ______________
____

c) Dado un número, ¿cuántas raíces cuadradas tiene? Expliquen. ______________________

____

d) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. Argumenten sus resultados y corrijan de ser necesario.

Un **número positivo** tiene **dos raíces cuadradas**: una positiva y otra negativa. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 16 son -4 y 4 ya que $(-4)^2 = 16$ y $4^2 = 16$.

Para indicar las dos raíces de un número se antepone el signo ± (más-menos) antes de éstas. Por ejemplo, para considerar las dos raíces de 16 se escribe

$$\sqrt{16} = \pm 4.$$

que es equivalente a escribir

$$\sqrt{16} = 4 \text{ y } \sqrt{16} = -4.$$

Potencia cuadrada y raíz cuadrada

Exploremos el comportamiento de aplicar potencia cuadrada y luego raíz cuadrada, y viceversa.

2. Completa la tabla 1.29.

Tabla 1.29. Potencias cuadradas y raíces cuadradas de algunos números

a	-8	8	-12	12	-20	20	-1.5	1.5	-3.6	3.6	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
a^2	64	64												
$\sqrt{a^2}$	8	8												

a) ¿Qué observas cuando se eleva al cuadrado un número positivo y al resultado se le extrae raíz cuadrada? ______________________

____

b) ¿Qué observas cuando se eleva al cuadrado un número negativo y al resultado se le extrae raíz cuadrada? ______________________

____

c) Escribe una regla general acerca de qué pasa cuando se eleva al cuadrado un número y al resultado se le extrae raíz cuadrada. ______________________

____

____

d) Comprueba tu regla con algunos ejemplos numéricos. ______________________

____

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenta tus resultados y corrige de ser necesario.

Gráficas de potencia cuadrada y raíz cuadrada

Exploremos la relación entre potencia cuadrada y raíz cuadrada de manera gráfica.

3. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder lo que se pide. Completen las tablas 1.30, 1.31 y 1.32. Usa calculadora.

Tabla 1.30

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
y = x	−2	−1.5	−1						

Tabla 1.31

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = x^2$	4	2.25							

Tabla 1.32

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = \sqrt{x}$	0	≈ 0.7			
$y = -\sqrt{x}$	0	≈ −0.7			

a) Analiza las gráficas de la figura 1.16.

b) Traza la gráfica de los datos de la tabla 1.30. ¿Qué tipo de variación es? ____________

c) Identifica en la figura los puntos $(x, y = x^2)$ de la tabla 1.31. ¿Sobre qué gráfica se encuentran? ____________

d) Ubica en la figura los puntos $(x, y = \sqrt{x})$ y $(x, y = -\sqrt{x})$ de la tabla 1.32. ¿Sobre qué gráfica se encuentran? ____________

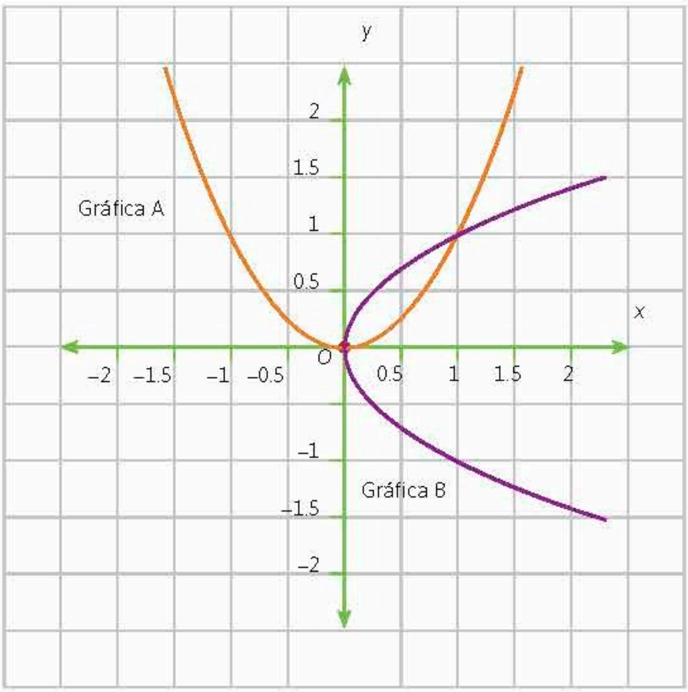


Figura 1.16

e) Analiza las tres gráficas de la figura 1.16. ¿Qué observas respecto a su simetría?

____

____

____

f) Calca las gráficas en una hoja blanca. Luego, dobla sobre la gráfica que trazaste en el inciso b). ¿Observas alguna simetría? Descríbela. ____________

____

____

____

g) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Argumenta tus resultados y corrige de ser necesario.

Problemas de potencias y raíces cuadradas

Ahora vamos a practicar lo aprendido sobre potencias y raíces cuadradas.

4. Aproxima el valor de las raíces cuadradas a dos cifras decimales.

a) $\sqrt{21} = -$________ b) $\sqrt{18} =$ ________

5. Completa las afirmaciones para que sean ciertas.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ _____ entonces $\sqrt{} =$ ______

b) Si $\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = \frac{1}{49}$ entonces $\sqrt{} =$ _____

c) Si $\square^2 =$ _____ entonces $\sqrt{} = \frac{1}{9}$

d) Si $\square^2 = 1.69$ entonces $\sqrt{} =$ _____

6. Completa las siguientes afirmaciones para que sean ciertas.

a) Si los lados de un cuadrado miden 2.2 u entonces su área es de ________ u^2.

b) Si los lados de un cuadrado miden ________ u entonces su área es de $\frac{9}{16}$ u^2.

c) Si los lados de un cuadrado miden ________ u entonces su área es de 625 u^2.

7. Responde:

a) ¿Es siempre positiva la raíz cuadrada de un número positivo? Explica. __________

____

____

b) ¿Puede ser negativo el cuadrado de un número? Explica. __________

____

____

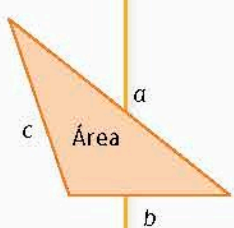
8. Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y procedimientos a los problemas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Portafolio P

La raíz cuadrada b de un número a positivo se denota como $\sqrt{a} = b$ y tiene la propiedad de que $b^2 = a$. El símbolo se llama radical. Generalizando esta definición, ¿cómo definirías la raíz cúbica b de un número a positivo? El símbolo que se usa para eso es $\sqrt[3]{}$. Explica en tu portafolio como calcularías $\sqrt[3]{27}$.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o las habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En el siglo I de n. e. Herón de Alejandría propuso una fórmula para calcular el área de un triángulo: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde a, b, y c son las longitudes de sus lados y $s = \frac{a+b+c}{2}$. Fuente: http://edutics.mx/w8d. (Consulta: 20 de septiembre de 2018).
   a) Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 5 m, 6 m y 2 m.



Piensa y sé crítico

María necesita saber la medida de los lados de un cuadrado cuya área es de 169 cm^2. Ella usa un programa para calcular la raíz cuadrada, el cual le arroja el resultado de ± 13. ¿Qué valor debe tomar? ¿Por qué?

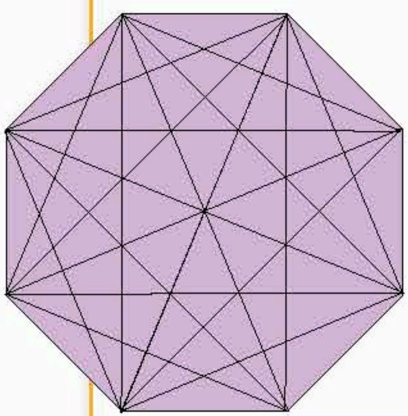
S6 Propiedades de polígonos

Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

L1 Diagonales de un polígono

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
   Georgina hace manualidades con hilo tensado. Está trabajando con un patrón para formar una figura como la que se muestra.



   a) ¿Cuántas líneas de hilo se deben hacer para unir todos los vértices unos con otros?
   b) Si el polígono del patrón tuviera 9 vértices, ¿cuántas líneas de hilo se deben hacer para unir todos los vértices?
   c) ¿Y si el polígono tuviera 10 vértices?
   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.
2. En equipos, discutan las características y propiedades de las diagonales de un polígono mediante la comparación de sus procedimientos, respuestas, argumentaciones y correcciones.

Desarrollo

Diagonales

Vamos a profundizar en el concepto de las diagonales de un polígono.

1. Considera los polígonos de la figura 1.17 y haz lo que se pide.
   a) Traza las diagonales de cada polígono.

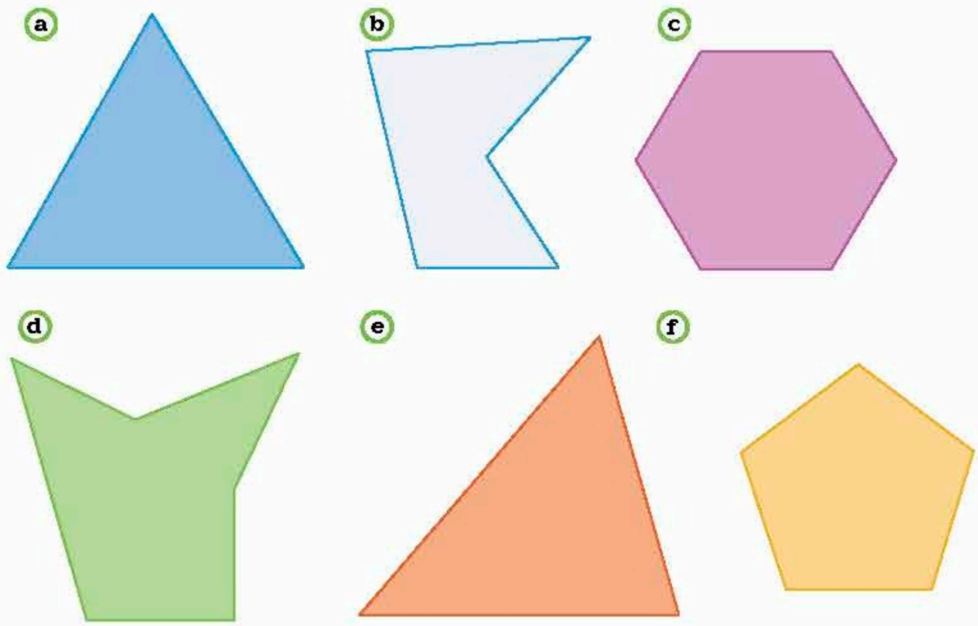


Figura 1.17. Diversos polígonos.

b) ¿Hubo algún polígono en el que no pudiste trazar diagonales? ¿En cuál? ____________

c) ¿Por qué razón no se podrían trazar diagonales en un polígono? ____________

____

d) ¿En cuáles polígonos todas sus diagonales están totalmente contenidas en ellos?

____

e) ¿En cuáles polígonos alguna de sus diagonales no está totalmente contenida en ellos? ____________

f) Define qué es una diagonal de un polígono. ____________

____

La **diagonal** de un polígono es el segmento de recta que tiene sus extremos en dos vértices no consecutivos del polígono.

2. En los recuadros, dibuja dos polígonos: uno en el que todas sus diagonales estén dentro de él y otro en el que alguna de sus diagonales quede fuera de él.

a) Compara tus trazos con tus compañeros. Verifiquen o hagan correcciones si se requiere.

Si en un polígono todas sus diagonales están enteramente contenidas en él, se dice que es **convexo**. Si alguna de las diagonales no está del todo contenida en él, se dice que el polígono es **cóncavo**.

Conoce más

Para observar las propiedades de los polígonos convexos y cóncavos, visita la página: http://www.edutics.mx/UDV. (Consulta: 20 de junio de 2018).

3. Considera los polígonos de la figura 1.18 y haz lo que se pide.

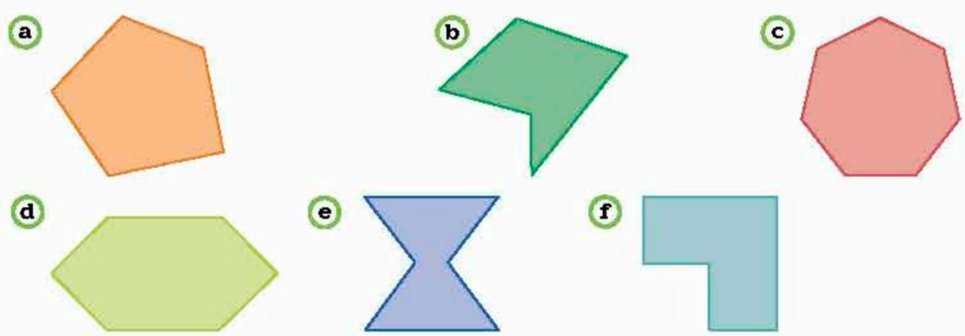


Figura 1.18. Diversos polígonos.

a) Determina cuáles polígonos son convexos y cuáles cóncavos. ______________________

b) En equipos, discutan las características que tienen los polígonos convexos y cóncavos. Den argumentos.

Número de diagonales desde un vértice

Vamos a explorar cuántas diagonales se pueden trazar desde uno de los vértices de un polígono.

4. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder lo que se pide. Consideren las parejas de polígonos de la figura 1.19.

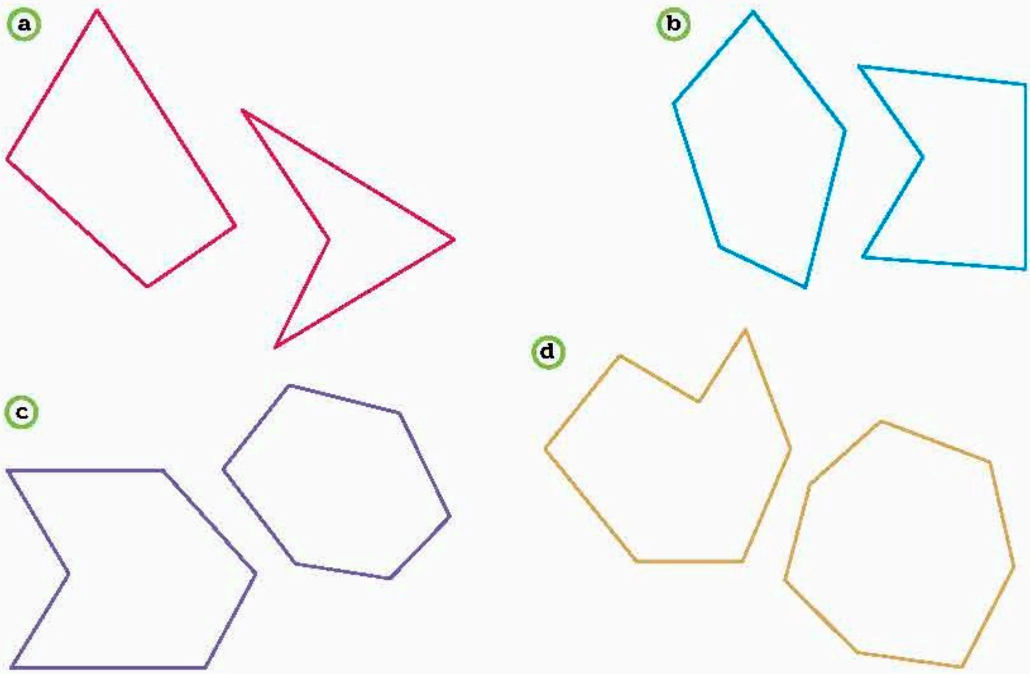


Figura 1.19. Diversos polígonos.

a) En cada pareja, ¿cómo es el número de lados del polígono convexo y el cóncavo correspondiente? ______________________

b) En cada polígono escojan un vértice y tracen las diagonales desde ese vértice.
- Para cada pareja de polígonos, ¿cómo es el número de diagonales del convexo y el cóncavo correspondiente? ______________________
- ¿Esto se cumple para cualesquiera polígonos convexo o cóncavo con el mismo número de lados? Expliquen. ______________________

c) ¿De qué creen que depende el número de diagonales en un polígono desde un vértice? ______________________

d) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Lleguen a una conclusión.

5. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para responder. Consideren los polígonos de la figura 1.20.

a) En cada polígono elijan un vértice y tracen todas las diagonales desde ese vértice, como en las figuras 1.20a y b.

b) Consideren el vértice que eligieron. Respondan lo siguiente para cada polígono:

- Los vértices que une cada diagonal, ¿son o no contiguos? ¿Por qué? ______

______

- ¿Quedaron vértices sin unir por una diagonal? ¿Por qué? ______

______

______

c) Completen la tabla 1.34 con base en las figuras anteriores.

Tabla 1.34

Polígono	Número de lados n	Número de diagonales d desde un vértice	Vértices que quedan sin unir por una diagonal
a	3	0	3
b			
c			
d			
e			
f			
g			

d) ¿Existe algún polígono que tenga igual cantidad de lados que de diagonales trazadas desde un vértice? Expliquen. ______

______

______

e) ¿Cómo pueden calcular el número de diagonales desde un vértice de un polígono según su número de lados? Escriban una expresión algebraica. ______

______

f) Comprueben su expresión. Calculen el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de los polígonos que se piden. También trácenlos en su cuaderno junto con sus diagonales desde cualesquiera de sus vértices.

- Polígono de 10 lados. ______
- Polígono de 15 lados. ______

g) Si un polígono tiene 10 diagonales trazadas desde un vértice, ¿cuántos lados tiene ese polígono? ______

h) En grupo, y con la guía de su profesor, comprueben sus resultados. Expliquen sus procedimientos.

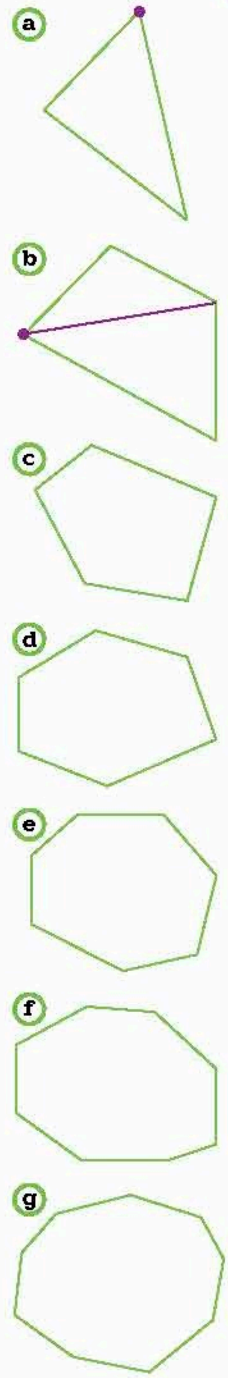


Figura 1.20. Diversos polígonos.

El número de **diagonales** que se puede trazar desde cualquier vértice de un polígono es igual al número de lados menos 3, esto es $d = n - 3$.

Conoce más

¿Cuantas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un polígono? Entra en http://edutics.mx/w6p (Consulta: 20 de junio de 2018).

Número total de diagonales

Vamos a explorar cuántas diagonales tiene en total un polígono.

6. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para responder. Consideren los polígonos de la figura 1.21.

a) Tracen todas las diagonales de cada polígono.

b) En cada polígono:

- ¿Es igual o distinto el número de diagonales que hay desde cada vértice? ______________________
- ¿Hay diagonales que se cuentan más de una vez? Explica. ______________________

c) Completen la tabla 1.35 con base en las figuras anteriores.

Tabla 1.35

Polígono	Número de lados n	Número de diagonales d desde cada vértice	Número total de diagonales
a			
b			
c			
d			
e			
f			
g			

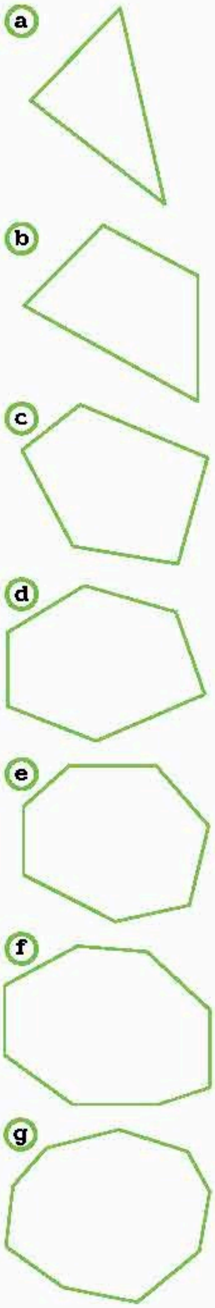


Figura 1.21. Diversos polígonos.

d) Respondan individualmente.

- ¿La cantidad de diagonales es proporcional a la cantidad de lados? ¿Por qué? ______________________
- ¿Cuántas diagonales en total puedes trazar en un polígono de 10 lados? ¿Hay diagonales que se repiten? ¿Cuántas? ¿Cómo puedes determinar cuántas diagonales que no se repiten tiene el polígono? ______________________
- ¿Cuántos lados tiene el polígono en el que se pueden trazar 2 diagonales desde 2 vértices consecutivos, sin que se repitan? ______________________
- Si un polígono tiene 35 diagonales, ¿cuántos lados tiene? ______________________

e) En equipo, discutan y respondan: ¿cómo se puede calcular el número total de diagonales de un polígono con base en su número de lados? También escriban una expresión algebraica. ______________________

f) Comprueben su expresión. Calculen el número total de diagonales de los polígonos que se piden. También trácenlos en su cuaderno junto con todas sus diagonales.

- Polígono de 10 lados. ___________
- Polígono de 15 lados. ___________

g) En grupo, y con la guía de su profesor, comprueben sus resultados. Expliquen sus procedimientos.

Conoce más

Para saber más acerca del número de diagonales que se puede trazar desde un vértice de un polígono, entra en http://edutics.mx/3KY. (Consulta: 20 de junio de 2018).

El número total de **diagonales** que se pueden trazar desde todos los vértices de un polígono de n lados es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Problemas de diagonales de polígonos

7. Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un polígono de...

a) 16 lados = ___________ b) 20 lados = ___________

c) 25 lados = ___________ d) 50 lados = ___________

8. Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de...

a) 65 lados = ___________ b) 75 lados = ___________

c) 85 lados = ___________ d) 100 lados = ___________

9. Seis computadoras estarán conectadas en una **red en malla** (figura 1.22).

Glosario

Red en malla. Es una red de computadoras en las que cada una está conectada con las demás.

Figura 1.22. Arreglo de seis computadoras.

a) Traza las conexiones entre computadoras.

b) Calcula el número de conexiones que tiene una computadora. ___________

____

c) Calcula el número total de conexiones que hay en la red. ___________

____

d) Si la computadora número 6 falla, ¿cuántas conexiones quedan? ___________

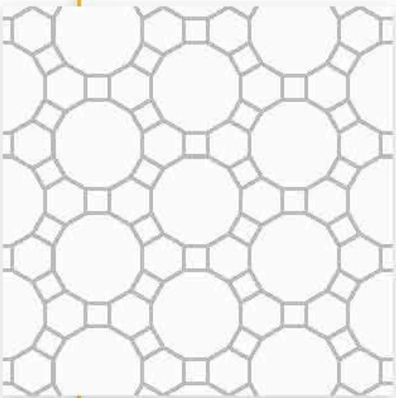
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Dos equipos de futbol, cada uno con 16 jugadores, jugarán un partido. Antes del juego se saludan de mano, todos con todos. ¿Cuántos apretones de mano hubo en total?

L2 Ángulos de un polígono

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.



Sofía es diseñadora y le han dado un dibujo para que lo incorpore como **marca de agua** a las páginas de un libro. Ella tiene que reproducirlo.

a) ¿Cómo describirías este diseño? ¿Qué polígonos identificas?
b) ¿Cuál es la medida del ángulo interior de cada polígono?
c) ¿Qué medidas son necesarias conocer para reproducir este diseño? Explica cómo reproducirlo.
d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
e) Describe el procedimiento que hiciste para saber la respuesta.

2. Reúnanse en equipo. Expresen las propiedades que conocen sobre los ángulos de un polígono mediante sus respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Ángulos interiores de un polígono

En un polígono cualquiera se contemplan dos tipos de ángulos: interiores y exteriores. Abordemos el primer tipo.

Glosario

Marca de agua. Imagen transparente que se coloca sobre las páginas de un documento.

Un ángulo **interior** de un polígono convexo es aquel formado por dos lados consecutivos.

1. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Consideren la figura 1.23. Marquen los ángulos interiores de cada polígono y todas las diagonales desde un vértice cualquiera.

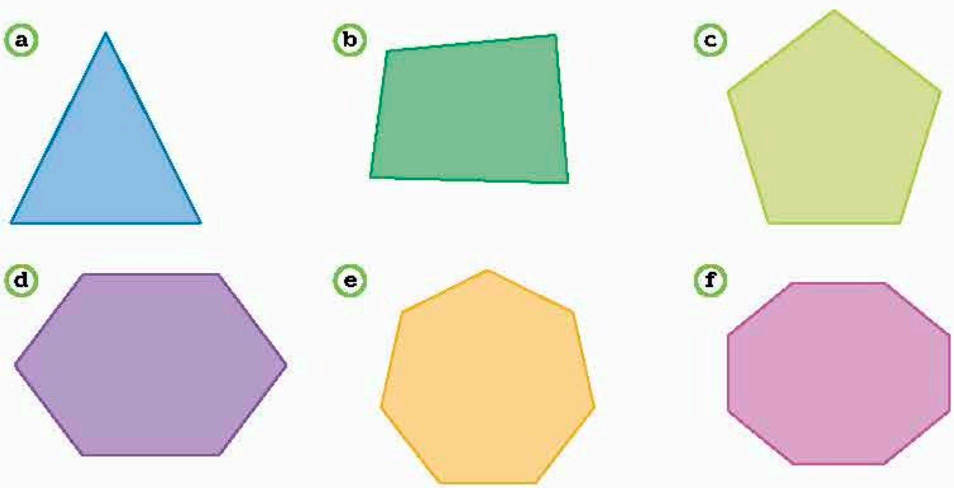


Figura 1.23. Diversos polígonos.

a) Completen las cuatro primeras columnas de la tabla 1.36 y luego respondan las preguntas en su cuaderno.

Tabla 1.36

Polígono	Número de lados n	Número de diagonales d desde un vértice	Número de ángulos interiores	Número de triángulos que se forman en el polígono	Suma de ángulos interiores
Triángulo					
Cuadrilátero					
Pentágono					
Hexágono					
Heptágono					
Octágono					

b) Con base en los resultados de la tabla 1.36 infieran: a partir de las diagonales trazadas desde un vértice, en cuántos triángulos queda dividido un polígono de n lados? Escriban una expresión en términos de n.

c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?

d) Completen la quinta columna de la tabla 1.36.

e) ¿A cuánto es igual la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados? Escriban una expresión en términos de n.

f) ¿Cómo son, entre sí, los ángulos interiores en un polígono irregular? Considera diversos casos, por ejemplo, un rectángulo, un triángulo isósceles, un rombo, etcétera.

g) ¿Cómo son entre sí los ángulos interiores en un polígono regular?

h) Si el polígono es regular de n lados, ¿cómo calcularían la medida de uno de los ángulos interiores? Expliquen y expresen su respuesta en términos de n.

i) En grupo, y con la guía de su profesor, comparen sus resultados y respuestas. En caso de discrepancias, argumenten sus resultados. Corrijan de ser necesario.
- Tracen en el pizarrón algunos polígonos regulares y validen sus expresiones anteriores. Si surgen dudas al respecto, discútanlas en grupo.

La **suma de las medidas de los ángulos interiores** de un polígono es $(n-2)180°$, donde n es el número de lados del polígono.

La **medida de un ángulo interior** de un polígono regular es

$$\frac{(n-2)180°}{n},$$

donde n es el número de lados del polígono.

Conoce más

Para saber más acerca de la suma de ángulos interiores de un polígono, entra en http://edutics.mx/Ui8. (Consulta: 20 de junio de 2018).

2. Propongan ejemplos de polígonos por equipos, trácenlos en su cuaderno y comprueben las expresiones anteriores.

Ángulos exteriores de un polígono convexo

Ahora abordaremos los ángulos exteriores de un polígono convexo.

Un **ángulo exterior** de un polígono convexo es aquel formado por un lado y la prolongación del lado consecutivo.

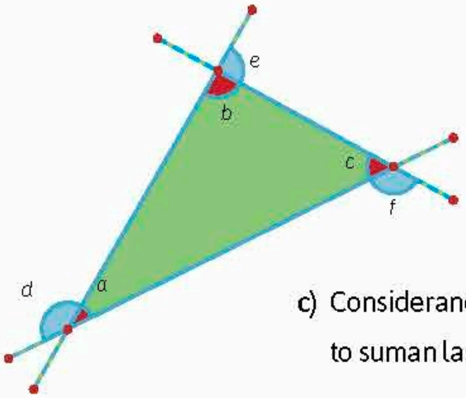


Figura 1.24. Triángulo con sus lados prolongados.

3. Considera el triángulo de la figura 1.24 y haz lo que se pide.

a) ¿Cuántos ángulos externos tiene cada ángulo interior de un triángulo? ¿Cómo es la medida de esos dos ángulos entre sí?

____

b) ¿Cuánto suman las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo? ______________________________

c) Considerando solamente un ángulo exterior por cada vértice del triángulo, ¿cuánto suman las medidas de cada ángulo interior y su correspondiente ángulo exterior?

____

d) Reproduce en una hoja blanca la figura 1.24 y recorta los ángulos exteriores. ¿Puedes formar un círculo? Si es así, ¿cuánto suman las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo? Explica. ______________________________

____

Notación

Se dice que una vuelta completa de una circunferencia mide 360°.

4. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Consideren los polígonos convexos de la figura 1.25. Marquen los ángulos interiores y sus respectivos ángulos exteriores de cada polígono.

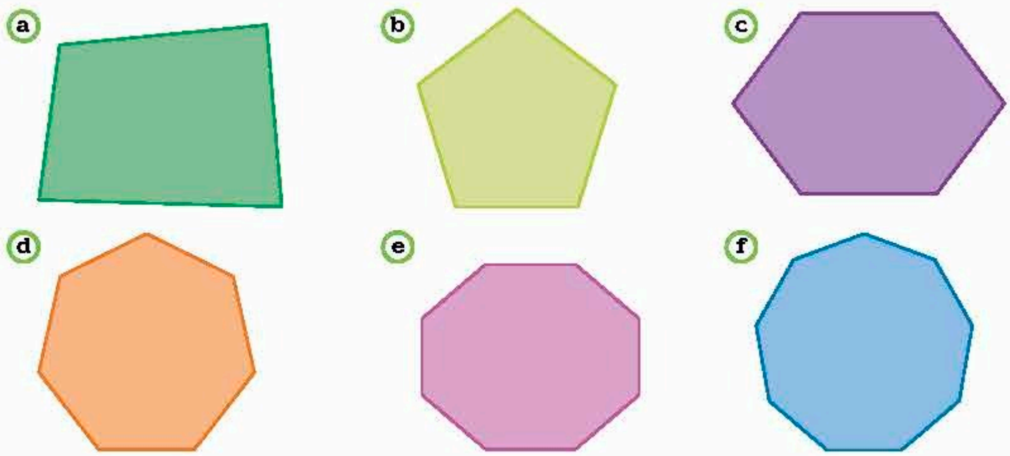


Figura 1.25. Diversos polígonos.

a) Considerando solamente un ángulo exterior por cada vértice de cada polígono, ¿cuánto suman las medidas de cada ángulo interior y su correspondiente ángulo exterior? Expliquen. ______________________________

____

b) Completen la tabla 1.37.

Tabla 1.37					
Polígono	**Número de lados n**	**Número de ángulos interiores**	**Suma de ángulos interiores**	**Número de ángulos exteriores**	**Suma de ángulos exteriores**
Triángulo					
Cuadrilátero					
Pentágono					
Hexágono					
Heptágono					
Octágono					
Nonágono					

c) ¿A cuánto es igual la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo de n lados? ____________________

d) ¿Cómo son entre sí los ángulos exteriores en un polígono irregular convexo? Considera diversos casos. ____________________

____

e) ¿Cómo son entre sí los ángulos exteriores en un polígono regular? ____________

f) Si el polígono es regular de n lados, ¿cómo calcularían la medida de uno de los ángulos exteriores? Expliquen y escriban una expresión algebraica. ____________

____

____

g) En grupo, y con la guía de su profesor, comparen sus resultados y respuestas. En caso de diferencias, argumenten sus resultados. Corrijan de ser necesario.

En un polígono convexo de n lados la **suma de las medidas** de un **ángulo interno** y su correspondiente **ángulo externo** es igual a 180°.

La **suma** de las medidas de los **ángulos exteriores** de un polígono convexo de n lados es igual a 360°.

La **medida de un ángulo exterior** de un polígono regular es

$$\frac{360°}{n},$$

donde n es el número de lados del polígono.

Conoce más

Para saber más acerca de la suma de ángulos exteriores de un polígono, entra en http://edutics.mx/Ui7. (Consulta: 20 de junio de 2018).

5. Reúnanse en equipo. Propongan ejemplos de polígonos convexos, trácenlos en su cuaderno y comprueben las expresiones anteriores.

Ángulos centrales de un polígono regular

Ahora abordaremos el tema de ángulo central de un polígono regular.

6. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Consideren los polígonos regulares de la figura 1.26.

a) Tracen las diagonales en cada polígono con un número par de lados.

- En cada polígono tracen una circunferencia que pase por todos sus vértices. Discutan lo siguiente: ¿en dónde deben ubicar el centro de dicha circunferencia?, ¿cómo pueden utilizar las diagonales que trazaron anteriormente?, ¿alguna de las intersecciones de las diagonales coincide con el centro de la circunferencia que se pide trazar? ¿Cuál?

Notación

Un polígono es regular si tiene todos su lados iguales y todos sus ángulos interiores iguales.

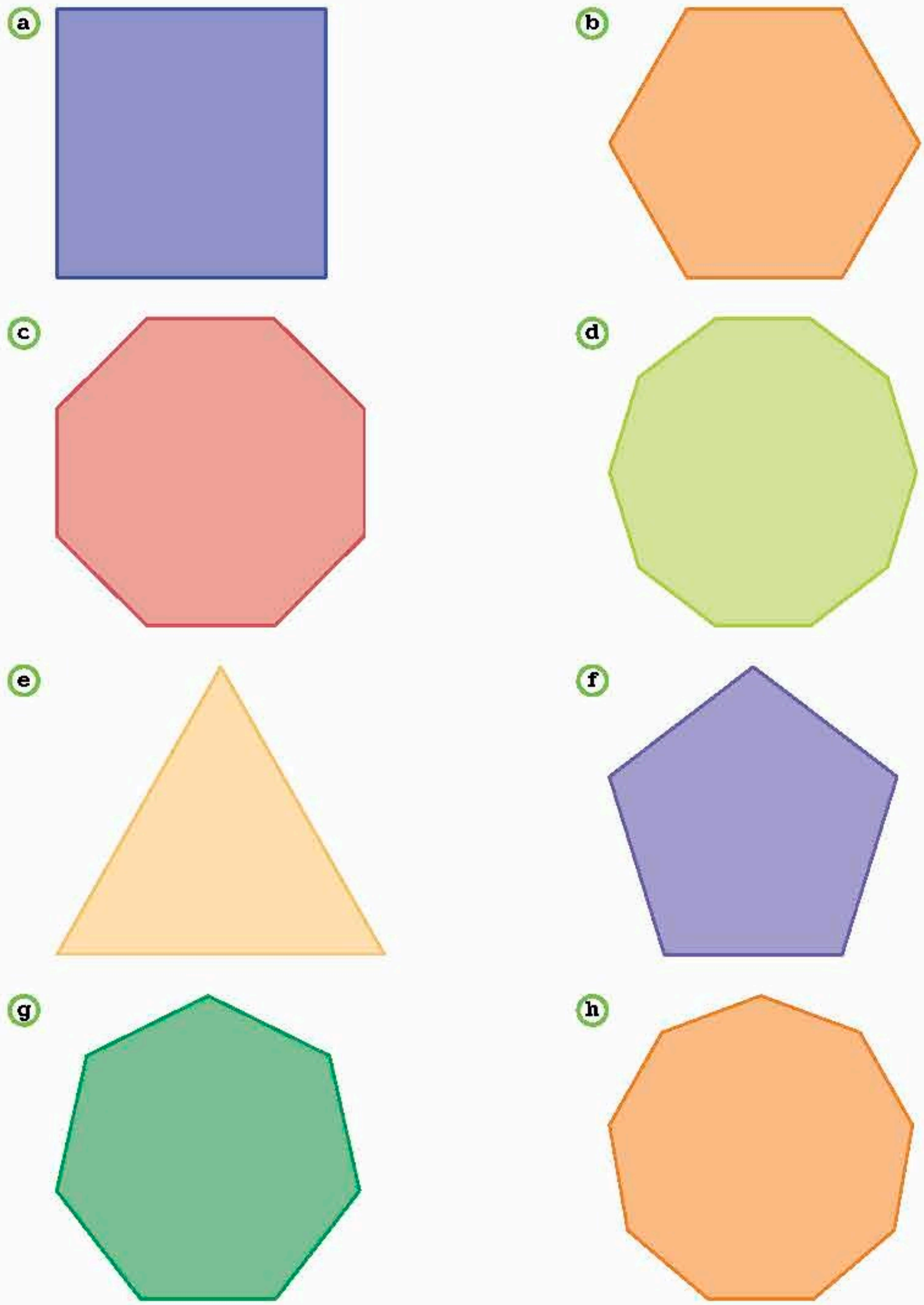


Figura 1.26. Diversos polígonos.

- Midan en cada polígono el ángulo cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia y sus lados con dos diagonales consecutivas. En el caso de los polígonos regulares con un número par de lados, ese ángulo es el ángulo central.

  Polígono a: ______. Polígono b: ______. Polígono c: ______. Polígono d: ______.

- Para cada polígono, ¿qué propiedad tienen estos ángulos? ____________
- ¿Cómo calcularían la medida de esos ángulos en un polígono regular de n lados? Escriban una expresión algebraica. ____________

b) Tracen las **alturas** en cada polígono que tiene un número impar de lados.

- En cada polígono tracen una circunferencia que pase por todos sus vértices. ¿Qué observan respecto al centro de la circunferencia? ____________
- Midan en cada polígono el ángulo cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia y sus lados con dos segmentos que pasan por dos vértices consecutivos.

  Polígono e: ______. Polígono f: ______. Polígono g: ______. Polígono h: ______

- Para cada polígono, ¿qué propiedad tienen éstos ángulos? ____________
- ¿Cómo calcularían la medida de esos ángulos en un polígono regular de n lados? Escriban una expresión algebraica. ____________

c) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y procedimientos. En caso de haber diferencias, argumenten y corrijan si se requiere. Lleguen a una conclusión.

El **centro** de un **polígono regular** es el punto que está a la misma distancia de todos los vértices. En un polígono regular con un **número par de lados**, el centro coincide con el punto de intersección de las **diagonales**, mientras que en uno con un **número impar de lados** el centro coincide con la intersección de las **alturas**.

En cualquier **polígono regular** siempre se puede trazar una **circunferencia** cuyo **centro** coincide con el centro del polígono y el **radio** es el segmento que va del centro a cualquier vértice. A la circunferencia y polígono así dispuestos se les llama **circunferencia circunscrita** y **polígono inscrito.**

La **medida de un ángulo central** es $\frac{360°}{n}$, donde n es el número de lados del polígono.

7. Reúnanse en equipos. Propongan ejemplos de polígonos para comprobar las expresiones anteriores.

Glosario G

Altura. En un polígono regular es cada uno de los segmentos de recta trazados desde un vértice al lado opuesto correspondiente, formando un ángulo recto con este último.

Infomáticas I

Los babilonios eran unos excelentes geómetras, pues bautizaron las doce constelaciones del zodiaco, dividiendo cada una de ellas en 30 partes iguales. Es decir, dividieron el círculo zodiacal en $12 \times 30 = 360$ partes, que son los 360° del círculo.

Problemas de ángulos de polígonos regulares

Ahora pondrás en práctica lo que has aprendido.

8. Considera el polígono regular de la figura 1.27 y haz lo que se pide.

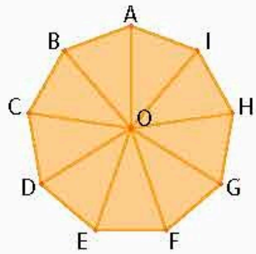


Figura 1.27. Eneágono regular.

a) ¿Cómo son los lados correspondientes de los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$?

____

b) ¿Qué puedes decir acerca de los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle ODE$, $\triangle OGH$? ______________

____

c) ¿Qué puedes decir de los ángulos de esos triángulos? ______________

____

d) Indica una propiedad de los ángulos centrales de un polígono regular. ______________

____

e) Calcula la medida de un ángulo interior, un ángulo exterior y un ángulo central.

- Ángulo interior: ______________
- Ángulo exterior: ______________
- Ángulo central: ______________

Infomáticas I

Tal como una hora, un grado se divide en 60 minutos y cada minuto, a su vez, en 60 segundos.

Portafolio P

Investiga la obra del pintor colombiano Omar Rayo (1928-2010), responde cuál es la base de sus obras de arte y realiza un diseño similar con polígonos regulares.

9. Observa los polígonos de la figura 1.28. Haz lo que se pide.

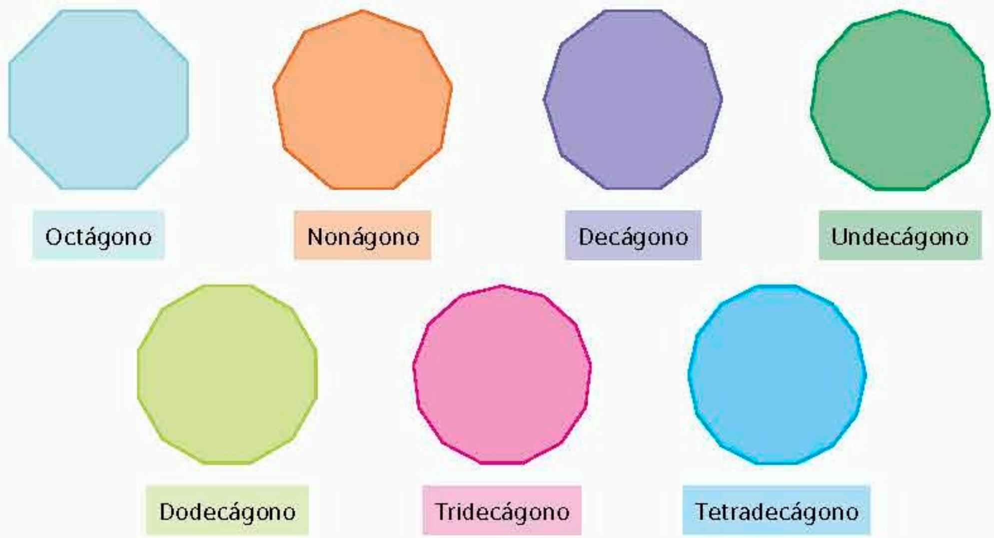


Figura 1.28. Diversos polígonos regulares.

a) ¿Qué sucede con el tamaño de los ángulos interiores, exteriores y centrales a medida que el número de lados de un polígono aumenta? ______________

____

b) ¿Qué estrategia consideras que es mejor para conocer las medidas de los ángulos interiores, exteriores y centrales de un polígono? Explica. ______________________

c) Completa la tabla 1.38.

Tabla 1.38						
Polígono regular	Número de lados *n*	Suma de las medidas de sus ángulos interiores	Medida de un ángulo interior	Medida de un ángulo central	Medida de un ángulo exterior	Suma de las medidas de sus ángulos exteriores
Octágono						
Nonágono						
Decágono						
Undecágono						
Dodecágono						
Tridecágono						
Tetradecágono						

Conoce más

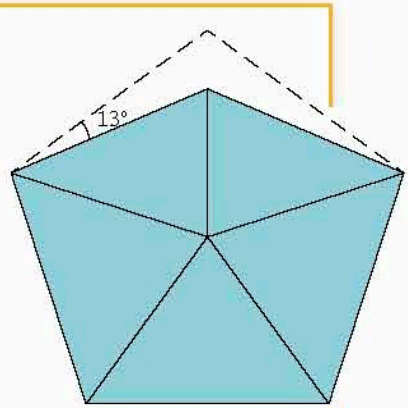
Te recomendamos el libro: *El billar no es de vagos. Ciencia, juego y diversión*, de Carlos Bosch, en el cual conocerás que el billar puede ser una herramienta de razonamiento mediante la resolución de problemas geométricos y algebraicos. Búscalo en tu biblioteca del aula.

d) ¿Qué relación hay entre un ángulo exterior y un ángulo central de un polígono regular? ______________________

10. Reúnanse en equipo. Comprueben que los resultados obtenidos y sus procedimientos fueron correctos. Argumenten o corrijan si es necesario.

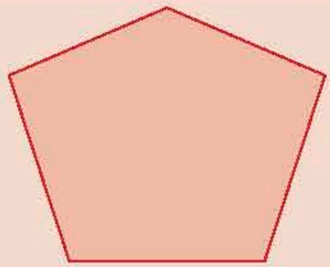
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Considera el polígono que forma el contorno de la figura azul que se encuentra al lado.
   a) Determina las medidas de sus ángulos interiores.
   b) Determina las medidas de sus ángulos exteriores.
   c) Determina las medidas de sus ángulos centrales.



Piensa y sé crítico

Armando ha trazado el polígono que se muestra en la figura del costado y quiere determinar su centro, tal como se ha definido en esta lección. ¿Cómo puede hacerlo? ¿Por qué? ¿Es posible determinar el centro de cualquier polígono? Explica.



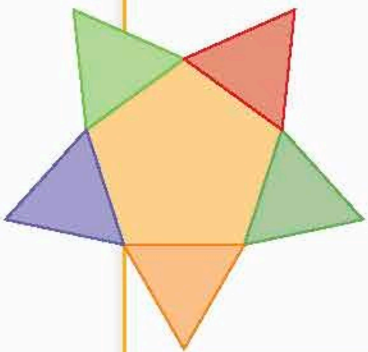
S7 Construcción de polígonos regulares

Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

L1 Algunas construcciones de polígonos

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
Raúl quiere un vitral para su puerta de entrada y le llama a Nayhelli, quien es una artista del vitral, para encargárselo. Raúl no puede ir al taller de Nayhelli, así que le describirá por teléfono el dibujo que se muestra en la figura. El tamaño del vitral debe ser 10 veces mayor



   a) ¿Qué indicaciones le darías a Nayhelli para que trace un bosquejo de la estrella?
   b) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   c) Describe el procedimiento que seguiste para saber qué elementos geométricos son importantes y responder.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Circunferencia circunscrita

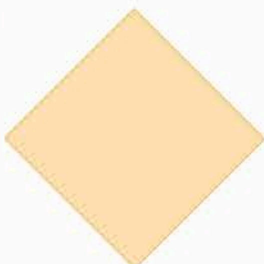
Los instrumentos básicos de geometría son: regla, que puede estar graduada, compás, dos escuadras y un transportador. En esta lección trabajaremos con la regla y el compás.

1. Traza la **circunferencia circunscrita** a los polígonos de las figura 1.29.

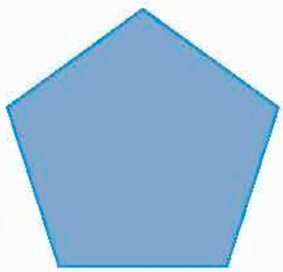
Glosario G

Circunferencia circunscrita. La que pasa por todos los vértices de un polígono y contiene a la figura completamente en su interior.

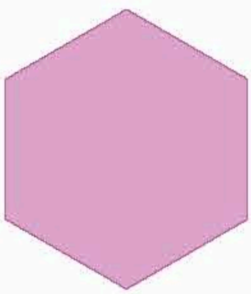
a



b



c



d

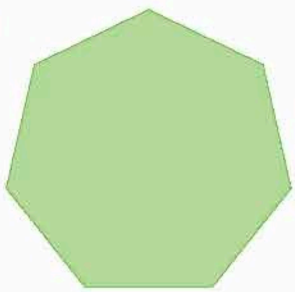


Figura 1.29. Cuadrado, pentágono, hexágono y heptágono.

a) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Trazo de polígonos dado el ángulo central

2. Reúnanse en parejas y definan la estrategia y los procedimientos para responder. Tracen el polígono regular inscrito en las circunferencias de la figura 1.30. En cada una se especifica la medida de su ángulo central.

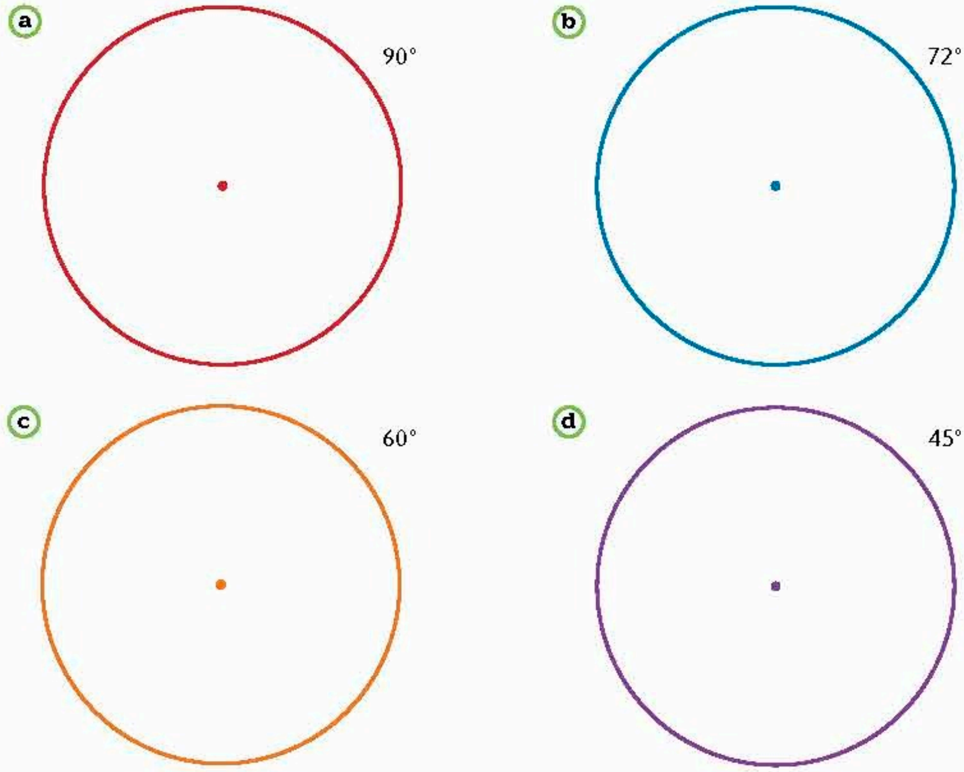


Figura 1.30

a) Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y prodecimientos. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Trazo de polígono regular dado el ángulo externo

3. Reúnanse en parejas. Consideren los segmentos de recta de la figura 1.31. Tracen el polígono regular que tenga el ángulo externo especificado y uno de sus lados sea el segmento dado.

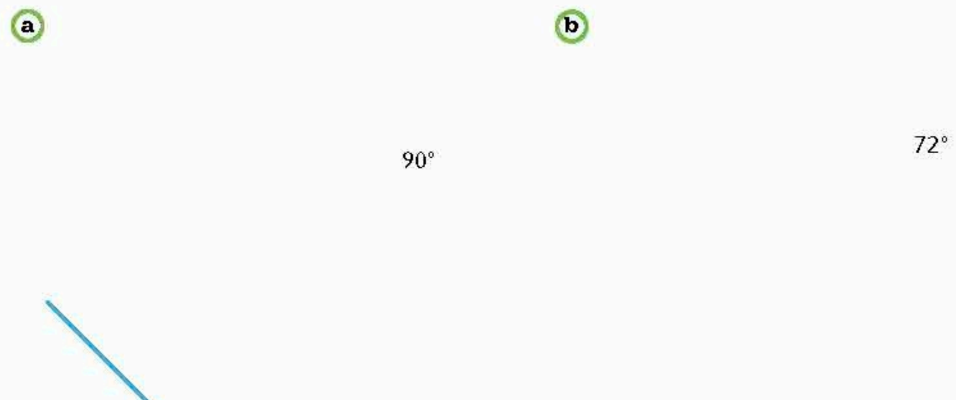


Figura 1.31

c) 60°

d) 45°

Figura 1.31 (continuación).

a) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Trazos diversos

4. Considera el segmento de recta. Coloca la punta del compás en cada extremo del segmento y traza dos circunferencias que pasen por el otro extremo correspondiente del segmento. Las circunferencias se intersecan en dos puntos. Une uno de esos puntos con los dos extremos del segmento.

a) ¿Qué polígono se forma? ____________________

b) ¿Qué propiedad tiene el polígono que se formó? ¿Cómo podrías demostrarla?

____

____

c) Ahora une el otro punto de intersección de las circunferencias que trazaste con los extremos del segmento. ¿Cómo es este triángulo respecto al anterior? ¿Cómo puedes demostrarlo? ____________________

____

d) Considerando todo el polígono formado por los extremos del segmento y los dos puntos de intersección de las circunferencias, ¿qué tipo de polígono se forma? Justifica.

____

Conoce más

Conoce el proceso para construir un heptadecágono con regla y compás. Entra en http://www.edutics.mx/UDj. (Consulta: 20 de junio de 2018).

e) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

5. Reúnanse en parejas y acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Tracen una circunferencia de 4 cm de radio. Después, sin cambiar la abertura del compás, coloquen la punta en algún punto de la circunferencia y marquen un punto sobre la circunferencia. Usen ese punto para repetir el mismo procedimiento y continúen.

a) ¿Qué polígono construyeron? Justifiquen su respuesta.

b) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

6. Reúnanse en parejas y determinen la estrategia y procedimientos para responder. Reproduzcan el polígono de la figura 1.32. La longitud de los lados debe ser el doble de la longitud del original. ¿Los ángulos central, interior y exterior aumentarán al doble también? Expliquen.

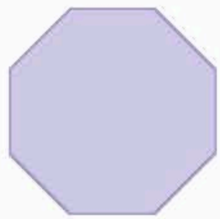


Figura 1.32. Octágono regular.

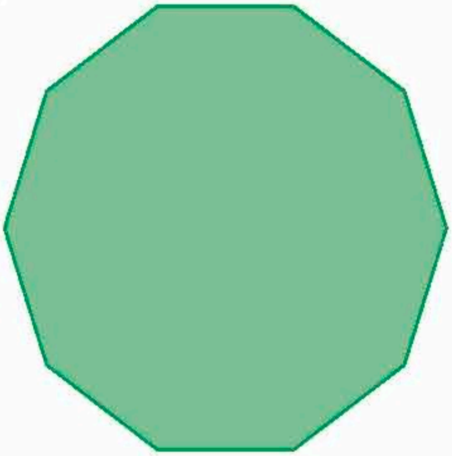


Figura 1.33. Decágono regular.

7. Reúnanse en parejas y elijan la estrategia y los procedimientos para responder. Reproduzcan el polígono de la figura 1.33. La longitud de los lados debe ser la tercera parte de la longitud del original. ¿Los ángulos central, interior y exterior se reducirán en una tercera parte también? Expliquen.

a) Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Problemas de trazo de polígonos

Portafolio P

¿Ángulos con qué medida puedes construir con regla y compás? Si esos ángulos corresponden a ángulos internos o centrales entonces puedes construir el polígono regular correspondiente. Construye cuatro polígonos regulares con regla y compás en una hoja que vas a adjuntar a tu portafolio.

8. Un arquitecto está diseñando una casa y quiere poner piso de loseta en el patio. Ha decidido que las formas de las losetas sean de algún polígono regular y todas iguales (figura 1.34).

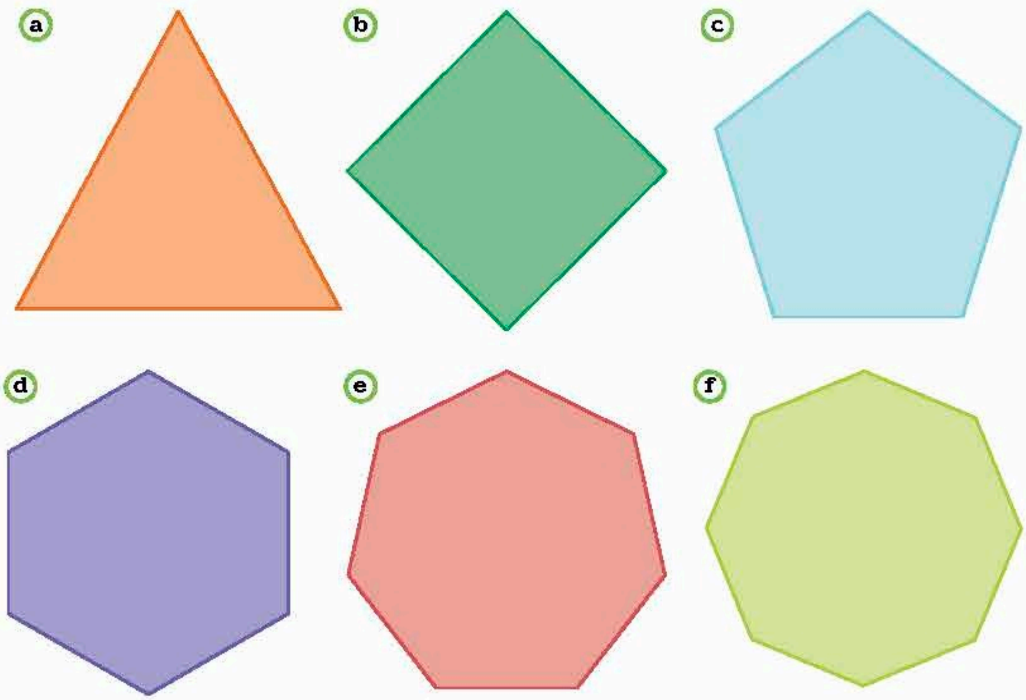


Figura 1.34. Diversos polígonos.

a) Marca los polígonos que en tu opinión cubren el piso plano completamente, es decir, sin sobreponerse y sin dejar huecos. Verifica tu suposición con recortes de copias de los polígonos.

b) Completa la tabla 1.39. Analiza el ejemplo.

Tabla 1.39

Polígono regular	Suma de ángulos interiores	Medida ángulo interior	Cociente de 360° entre la medida del ángulo interior
Triángulo	180°	60°	6
Cuadrado			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octágono			

c) ¿Con cuáles polígonos regulares se puede cubrir completamente el piso plano de una habitación? ____________________

d) ¿Qué relación observas entre los polígonos con los que se puede cubrir un piso plano y sus respectivos cocientes de la cuarta columna de la tabla? ____________________

e) ¿Un polígono regular de nueve lados puede cubrir el piso plano de un patio? Explica. ____________________

f) Argumenta por qué los polígonos de más de 6 lados no pueden cubrir el piso plano de un patio. ____________________

9. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Infomáticas

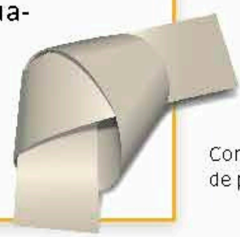
Hay construcciones geométricas que no se pueden hacer usando únicamente regla y compás. Estas son:

1. La cuadratura del círculo. Construir un cuadrado con la misma área que un círculo dado.
2. La duplicación del cubo. Construir la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen de un cubo dado.
3. La trisección del ángulo. Construir las semirrectas que dividen un ángulo en tres ángulos iguales.

Fuente: http://edutics.mx/w8n (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Construye un polígono regular con una tira de papel de aproximadamente 4 cm de ancho y de más de 20 cm de largo. Analiza la figura para guiarte. ¿Qué polígono se forma?



Construcción con tira de papel.

Piensa y sé crítico

El mosaico de la figura se llama *mosaico en espiral de Heinz Voderberg* inventado en 1936 por el matemático Heinz Voderberg. Este mosaico cubre el plano totalmente. Puedes ver una imagen en http://edutics.mx/w8e.

a) ¿Cuántos lados tiene cada uno de los polígonos?
b) ¿Cómo son esos polígonos, convexos o cóncavos?
c) ¿Piensas que con estos polígonos se puede cubrir el plano? Explica.

POLÍGONOS Y POLIEDROS

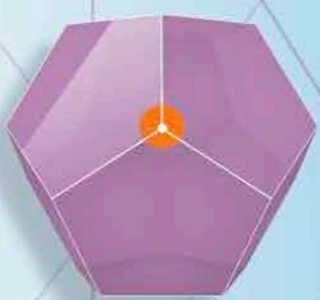
Un poliedro es regular si:

- Todas las caras son el mismo polígono regular.
- En cada vértice concurren el mismo número de caras.
- Los ángulos formados en cada vértice son todos iguales.

Polígonos que forman poliedros regulares

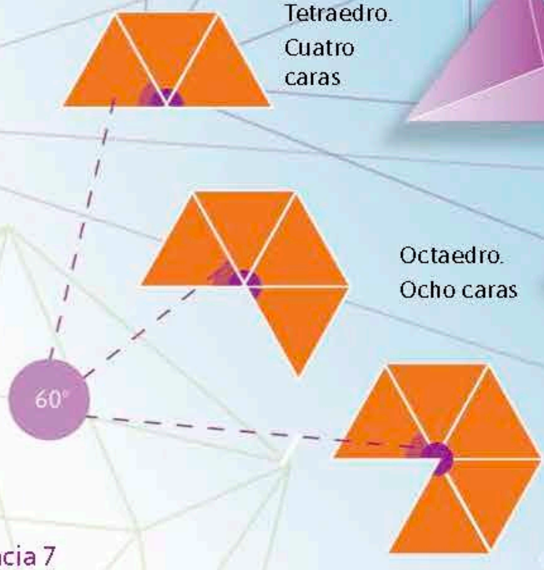
Sólo existen **cinco poliedros regulares convexos**. Para deducirlo se puede considerar que:

- En cada vértice del poliedro concurren al menos tres polígonos regulares, que son las caras.
- La suma de los ángulos interiores de las caras que convergen en el vértice debe ser menor que 360°. Esto es para que sea posible generar un volumen.



Poliedros formados con polígonos regulares

Con triángulos equiláteros las posibilidades son sólo tres.



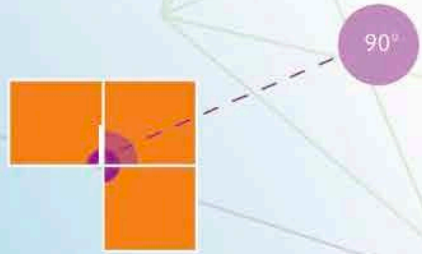
Tetraedro. Cuatro caras

Octaedro. Ocho caras

Icosaedro. Veinte caras

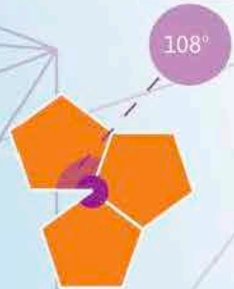
Con cuadrados la posibilidad es sólo una.

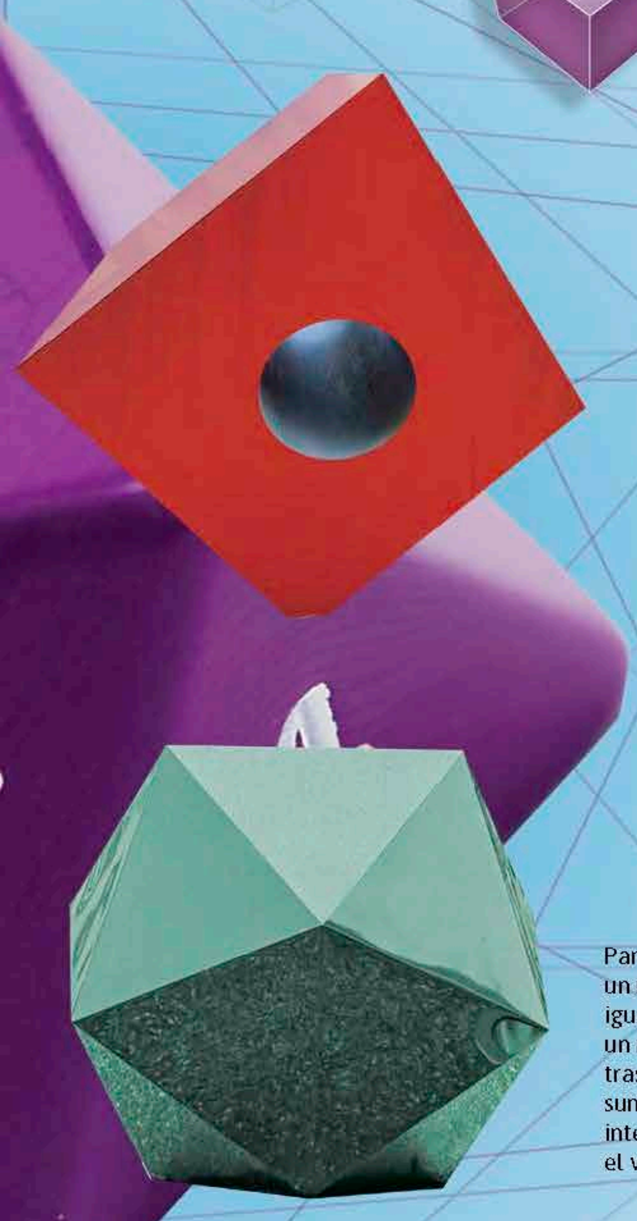
Hexaedro.
Seis caras



Con pentágonos regulares la posibilidad es sólo una.

Dodecaedro.
Doce caras





Con hexágonos regulares no se puede formar un poliedro, ya que la suma de tres ángulos interiores en el vértice es 360° y estarían en un mismo plano.

Tres hexágonos que convergen en un vértice.

Para polígonos regulares con un número de lados mayor o igual que 7, al poner tres en un mismo vértice estos se traslapan, lo que indica que la suma de los ángulos interiores que convergen en el vértice es mayor que 360°.

Tres heptágonos que convergen en un vértice.

Tres octágonos que convergen en un vértice.

Analiza y resuelve.

- ¿Cuántos poliedros regulares hay? ¿Por qué?
- ¿Cómo se relaciona el arreglo de polígonos que concurren en un vértice con el desarrollo plano de su poliedro regular correspondiente?

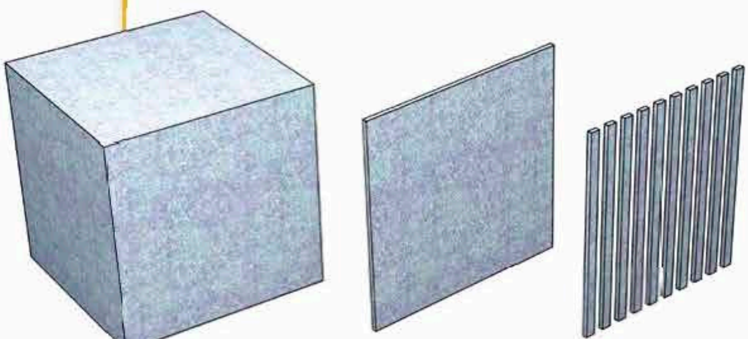
S8 Conversión de unidades del SI y del sistema inglés

Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

L1 Conversión entre unidades del SI

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
Un artista conceptual requiere tiras de resina para una de sus obras, así que elabora un cubo de resina de 1 m de alto por 1 m de ancho por 1 m de largo para cortarlo en lajas paralelas a una de las caras, cada una con un espesor de 1 cm. Luego, cada laja la corta en tiras de un 1 mm de grueso.
   a) ¿A cuántos centímetros equivale un metro? ¿Cuántas lajas se obtuvieron?
   b) ¿Cuantos milímetros hay en un centímetro? ¿Cuántas tiras se obtuvieron?
   c) ¿Qué área total cubren las lozas? ¿Qué longitud cubren las tiras (una tras otra a lo largo)?



   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describe el procedimiento que hiciste para saber la respuesta.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados y procedimientos.

Desarrollo

Múltiplos y submúltiplos de unidades del SI

Exploremos primero las unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades (SI), para luego conocer sus múltiplos y submúltiplos.

1. Analiza la información y haz lo que se pide.

El **Sistema Internacional de Unidades** se fundamenta en siete unidades de base correspondientes a las magnitudes de longitud, masa, tiempo, corriente eléctrica, temperatura, cantidad de materia, e intensidad luminosa. Estas unidades son conocidas como el metro, el kilogramo, el segundo, el ampere, el kelvin, el mol y la candela, respectivamente.

https://www.gob.mx/se/articulos/mexico-se-rige-bajo-el-sistema-internacional-de-unidades-de-medida

Conoce más
Para saber más acerca de la historia de la medición, entra en http://edutics.mx/UTY. (Consulta: 20 de junio de 2018).

   a) Escribe dos unidades de longitud distintas al metro. ____________
   b) Escribe dos unidades de masa distintas al kilogramo. ____________
   c) Escribe dos unidades de tiempo distintas al segundo. ____________

Con las unidades básicas del SI se generan unidades mayores llamadas **múltiplos** y unidades menores denominadas **submúltiplos**. Por convención, todos se designan con **prefijos** que se anteponen al nombre de la unidad básica, los cuales tienen un símbolo y representan un valor. Por ejemplo, un múltiplo del metro es el kilómetro (prefijo kilo, que significa mil, unidad metro, símbolo km, igual a 1 000 m) y un submúltiplo del metro es el centímetro (prefijo centi, que significa centésima parte, unidad metro, símbolo cm, igual a 1/100 m). Observa la tabla.

Algunos múltiplos y submúltiplos, prefijos y significado							
Múltiplos				Submúltiplos			
Prefijo	Símbolo	Significado		Prefijo	Símbolo	Significado	
Tera	T	Un billón	10^{12}	Deci	d	Un décimo	10^{-1}
Giga	G	Mil millones	10^{9}	Centi	c	Un centésimo	10^{-2}
Mega	M	Un millón	10^{6}	Mili	m	Un milésimo	10^{-3}
Kilo	k	Mil	10^{3}	Micro	μ	Un millonésimo	10^{-6}
Hecto	h	Cien	10^{2}	Nano	n	Un mil millonésimo	10^{-9}
Deca	da	Diez	10^{1}	Pico	p	Un billonésimo	10^{-12}

Conoce más

Lee el artículo *Precisión se precisa* para saber más acerca de los patrones de medida; entra en http://edutics.mx/UTg. (Consulta: 20 de junio de 2018).

2. Reúnanse en equipo y en su cuaderno escriban ejemplos en los que la unidad básica de masa y longitud no resultan del todo prácticas para realizar la medición. Después comenten sus respuestas con el resto de sus compañeros.

Conversión de unidades (metro, gramo y litro)

Es posible convertir medidas de la misma magnitud, por ejemplo, de kilómetros a metros o de miligramos a gramos.

Una **equivalencia** es una relación de igualdad entre dos cantidades de la misma magnitud. Por ejemplo, 1 000 m = 1 km y 1 dm = 0.1 m son equivalencias.

Notación

El litro (l o L) no pertenece al Sistema Internacional de Unidades, pero por su uso extendido se considera que es preferible mantenerlas.

3. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para realizar las equivalencias correspondientes.

a) Resuelvan lo que se pide en su cuaderno.

- Julián ha comprado un tablón de 1.25 m de longitud para hacer repisas de 20 cm de largo. ¿Cuántas repisas obtendrá? Consideren que 1 m = 100 cm.
- Esteban corre 2.5 km diarios para entrenarse para una competencia. Si su zancada es de 1.2 m, ¿cuántos pasos da? Consideren que 1 km = 1 000 m.
- Gabriela ha elaborado 3.5 L de vinagre y los quiere envasar en botellas de 250 mL para regalar a todos sus amigos. Si a cada uno le tocó una botella y no sobró líquido, ¿cuántos amigos tiene Gabriela? Consideren que 1 L = 1 000 mL.
- El peso promedio de una hormiga es de 3 mg aproximadamente. Una bióloga ha tomado una muestra de ellas de 18 g. ¿Cuántas hormigas hay en la muestra? Consideren que 1 g = 1 000 mg

b) Completen la tabla 1.40 de equivalencias.

Tabla 1.40. Algunas equivalencias de metro, gramo y litro						
Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		10 m	1 m	0.1 m		
10^3 m		10^1 m	10^0 m	10^{-1} m		10^{-3} m
Kilogramo	Hectogramo	Decagramo	gramo	Decigramo	Centigramo	Miligramo
	hg		g		cg	
	100 g		1 g		0.01 g	
	10^2		10^0		10^{-2}	
Kilolitro	Hectolitro	Decalitro	litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
			L			
			1 L			
			10^0			

Conoce más

Para saber acerca de la nueva definición del kilogramo, entra en http://edutics.mx/UYJ. (Consulta: 20 de junio de 2018).

c) Completen las oraciones para que sean ciertas.

- Si 1 km equivale a ________ hm, entonces 3.2 km equivalen a ________ hm.
- Si 1 hg equivale a ________ g, entonces 5.1 hg equivalen a ________ g.
- Si 1 L equivale a ________ mL, entonces 4.8 L equivalen a ________ mL.
- Si 1 mL equivale a ________ cL, entonces 2.9 mL equivalen a ________ cL.
- Si 1 cL equivale a ________ L, entonces 6.3 cL equivalen a ________ L.
- Si 1 g equivale a ________ kg, entonces 7.8 g equivalen a ________ kg.

d) ¿Qué procedimiento siguieron para convertir de una unidad mayor a una menor?

____

e) ¿Qué procedimiento siguieron para convertir de una unidad menor a una mayor?

____

f) Propongan en su cuaderno un procedimiento para convertir unidades de medida de la misma magnitud.

g) Validen su procedimiento. Conviertan las unidades de medida.

- 2.89 km a m ________
- 3.25 hg a g ________
- 12 dL a L ________
- 6.18 cm a dam ________

Otra unidad importante es la **tonelada** (t), la cual equivale a 1 000 kg = 1 000 000 g.

4. Reúnanse en equipo y hagan lo que se les pide.

a) ¿En qué contextos han escuchado o leído el uso de tonelada? ________

____

b) Hagan las conversiones.

- 3 t a g ______________
- 800 kg a t ______________
- 250 000 dag a t ______________
- 0.025 t a mg ______________

5. Relaciona cada objeto con su medida aproximada. Completa a continuación las equivalencias.

Camión cisterna	Bote de crema
Jarra de agua	Biberón chico
Barrica de roble	Jeringa
"Cuartito" de leche	Tinaco

0.5 L = ______________ ml

25 cl = ______________ L

50 ml = ______________ dal

1.2 kl = ______________ L

2 hl = ______________ cl

0.9 dl = ______________ ml

3.5 kl = ______________ L

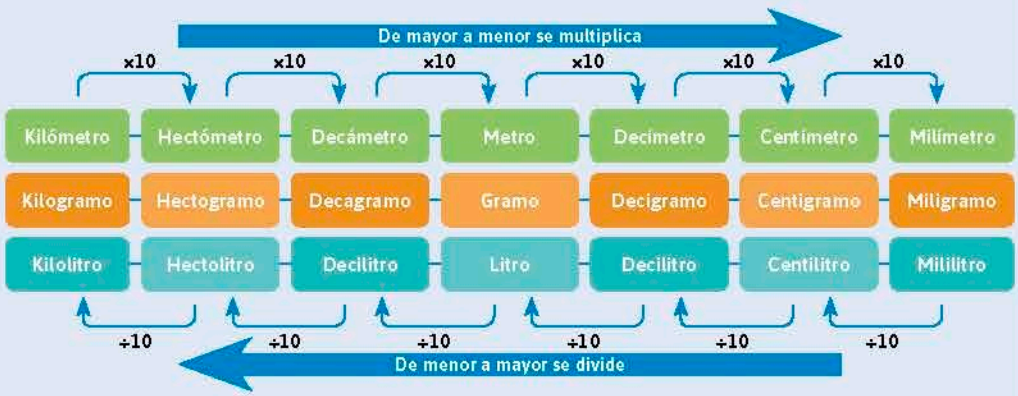
1.5 dl = ______________ ml

Glosario G

Barrica. Recipiente de madera utilizado para elaborar y conservar el vino.

a) Comparen sus procedimientos y respuestas con los de otros equipos. Discutan el manejo del punto decimal en la conversión de unidades.

Para **convertir entre unidades de medida** correspondientes a la misma magnitud se multiplica por un múltiplo de 10 cuando se va de una unidad mayor a una menor, y se divide por un múltiplo de 10 cuando se va de una unidad menor a una mayor.



Conversión de unidades de área y volumen

6. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder.

a) Resuelvan lo que se pide en su cuaderno.

- El área de una hoja de papel cuadrada es de 1 m². ¿Cuántos cuadritos de 1 cm de lado puedes trazar en la hoja de tal manera que la cubran completamente? ¿Cuál es el área de cada cuadrito? ¿Cual es el área de todos los cuadritos? ¿A cuánto equivale 1 m² en cm²?
- Una caja de cartón cúbica tiene un volumen de 1 m³. ¿Cuántos cubitos de 1 cm² de lado puedes meter en la hoja de tal manera que la llenen completamente? ¿Cuál es el volumen de cada cubito? ¿Cual es el volumen de todos los cubitos? ¿A cuánto equivale 1 m³ en cm³?

b) Completen la tabla 1.41 de equivalencias.

Tabla 1.41. Algunas equivalencias

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cuadrado	Hectómetro cuadrado	Decámetro cuadrado	Metro cuadrado	Decímetro cuadrado	Centímetro cuadrado	Milímetro cuadrado
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2		100 m^2		0.01 m^2		0.000001 m^2
10^6 m^2	10^4 m^2				10^{-4} m^2	
Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decámetro cúbico	Metro cúbico	Decímetro cúbico	Centímetro cúbico	Milímetro cúbico
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1 000 000 000 m^3		1 000 m^3		0.001 m^3		0.000000001 m^3
10^9 m^3	10^6 m^3				10^{-6} m^3	

Notación

Al metro cuadrado y metro cúbico se les conoce como unidades derivadas, pues se obtienen de las unidades básicas del SI.

c) Completen las oraciones para que sean ciertas.

- Si 1 km^2 equivale a ________ hm^2, entonces 2.3 km^2 equivalen a ________ hm^2.
- Si 1 hm^2 equivale a ________ m^2, entonces 0.15 hm^2 son ____________ m^2.
- Si 1 m^3 equivale a ________ dm^3, entonces 8.4 m^3 equivalen a ________ dm^3.
- Si 1 mm^3 equivale a ________ cm^3, entonces 92 mm^3 son ____________ cm^3.

d) ¿Qué procedimiento siguieron para convertir de una unidad mayor a una menor?

____

e) ¿Qué procedimiento siguieron para convertir de una unidad menor a una mayor?

____

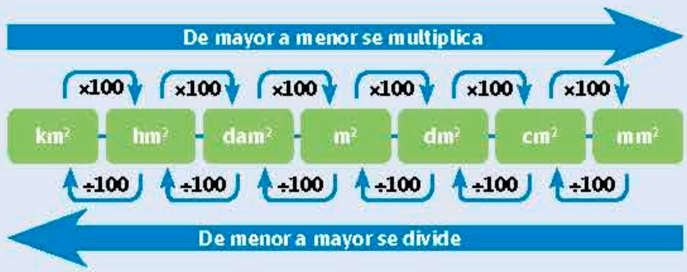
f) En su cuaderno propongan dos procedimientos, uno para convertir unidades de medida cuadradas de la misma magnitud y otro para convertir unidades de medida cúbicas de la misma magnitud.

g) Reúnanse con otros equipos. Expresen las semejanzas y diferencias en las conversiones de medidas de longitud, área y volumen. Corrijan si se requiere.

Notación

Al hectómetro cuadrado se le conoce también como hectárea (ha). Esta unidad es muy común en la medición de grandes terrenos.

Para hacer **conversiones entre unidades de medida de área**, se multiplica o divide por múltiplos de 100.



Para hacer **conversiones entre unidades de medida de volumen** se multiplica o divide por múltiplos de 1 000.

El litro (L) es una unidad de capacidad usada principalmente para líquidos o gases. Su equivalencia es: $1\text{ L} = 1\text{ dm}^3 = 1\,000\text{ cm}^3 = 0.001\text{ m}^3$.

Factores de conversión de unidades

Un método para convertir unidades es en el que se usan los factores de conversión.

7. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder.

a) Juan tiene una varilla de 1.73 m y necesita trozos de 8 cm. ¿A cuántos centímetros equivale la longitud de la varilla? ¿Cuántos trozos obtendrá?

- ¿De cuál y a cuál unidad se quiere convertir? ______________________
- Escriban la equivalencia entre estas unidades. ______________________
- A partir de esta equivalencia se pueden formar dos razones. Analicen la primera que se muestra y escriban la segunda. $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$ $\qquad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$
- ¿Cuál de las fracciones se puede multiplicar por 1.73 m para hacer la conversión a cm? Expliquen. ______________________

____
- Completen la operación con la fracción elegida y resuelvan. ¿En qué unidad queda el resultado? $1.73\text{ m} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} =$ ____________
- Resuelvan las preguntas del inciso a)

b) Luis usó su regla de 30 cm para medir el largo de una mesa pues necesita comprar el mantel. La medida tomada por Luis fue de 158 cm. En la tienda, el vendedor le pide las medidas en metros. ¿A cuánto equivalen 158 cm en metros?

- ¿Pueden utilizar la misma equivalencia que en el caso anterior? ¿Se forman las mismas fracciones? Expliquen. ______________________

____
- ¿Cuál de las fracciones se puede multiplicar por 158 cm para hacer la conversión a metros? ______________________
- Completen la operación con la fracción que eligieron y resuelvan ¿En qué unidad se expresa el resultado? $158\text{ cm} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} =$ ____________
- Resuelvan la pregunta del inciso b) ______________________

c) ¿Qué característica del problema indica qué fracción se debe usar para hacer la conversión de unidades? Hagan una conjetura. ________________

d) ¿Es posible aplicar este mismo método para convertir otras unidades? ¿Cómo? ________________

e) Completen la tabla 1.42.

Tabla 1.42

Conversión	Equivalencia	Factor de conversión	Operación	Resultado
2.56 km a m	1 km = 1 000 m	$\frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ km}}$		
385 mm a m				
32 500 g a hg				
0.6 L a ml				
1.1 hm^2 a m^2				
300 dm^3 a m^3				

f) Revisen sus resultados y procedimientos al reunirse con otros equipos. Elijan los métodos con mayor eficiencia en la conversión de unidades. Corrijan sus respuestas si es necesario.

Un **factor de conversión** es una razón que relaciona la equivalencia de dos unidades de medida. Por ejemplo, de la equivalencia 1 kg = 1 000 g se obtienen dos factores de conversión:

$$\frac{1\,000\text{ g}}{1\text{ kg}} \text{ y } \frac{1\text{ kg}}{1\,000\text{ g}}$$

Para realizar una conversión de unidades, se multiplica la cantidad a convertir por el factor de conversión que tenga en el denominador la unidad que se desea convertir. Por ejemplo:

123 kg a g	123 g a kg
$123\text{ kg} \times \frac{1\,000\text{ g}}{1\text{ kg}} = 123 \times 1\,000\text{ g} = 123\,000\text{ g}$	$123\text{ g} \times \frac{1\text{ kg}}{1\,000\text{ g}} = \frac{123}{1\,000}\text{ kg} = 0.123\text{ kg}$

Problemas de conversión de unidades

8. Resuelve lo que se pide.

a) El rascacielos más alto del mundo es el Burj Khalifa (figura 1.35), ubicado en la capital de Emiratos Árabes Unidos, Dubái. Tiene una altura de 0.828 km y un volumen de 0.33 hm^3 de hormigón; el peso aproximado de la torre es de 500 000 t y necesita unos 9 460 hL de agua diarios para su sistema de abastecimiento. Si un elevador recorre 10 m cada segundo, ¿cuánto tiempo tardaría en recorrer todo el rascacielos?

____

b) El monte Olimpo (*Olympus Mons*) se encuentra en el hemisferio occidental del planeta Marte y es el mayor volcán conocido en el Sistema Solar (figura 1.36). Su altura es de 2 256 dm. Cuántas veces es más alto el monte Olimpo que el rascacielos Burj Khalifa? ______________

Figura 1.35. Rascacielos Burj Khalifa.

9. Analiza la situación. Responde lo que se te pide.

a) Una llave tiene gastada la pieza que evita que, al cerrarla, el agua goteé. Cada 2 s caen tres gotas y 20 gotas hacen 1 ml. ¿Cuántos litros de agua se han desperdiciado después de ocho días? ______________

b) Sin arreglo, la llave gotea a un ritmo de 2 ml en 5 s. ¿Cuánto litros y kl de agua se desperdiciarían en 30 días? ______________

Figura 1.36. Monte Olimpo, en Marte.

c) El consumo promedio de agua por una persona es de 120 L diarios. ¿A cuántos días de desperdicio de la llave del inciso b) equivale? ______________

d) El consumo promedio de agua en alimentos de una persona es de 5 L diarios. ¿Al consumo de agua para alimentos de cuántas personas equivale el desperdicio de la llave del inciso b)? ______________

e) Reúnanse en equipo. Expresen mediante argumentaciones la validez de sus respuestas. Corrijan en caso que sea necesario.

Conoce más

Para practicar la conversión de unidades en el SI, dirígete a la página: http://www.edutics.mx/3C2. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Cierre

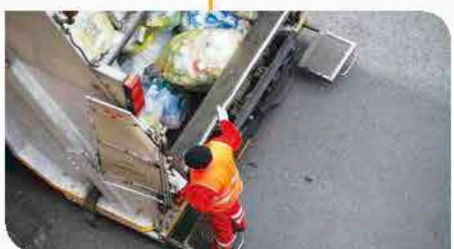
1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. En México cada persona genera 770 gramos de basura al día en promedio. La población de México en 2015 fue de 119 938 473 personas (http://edutics.mx/w82).

a) ¿Cuántos kilogramos de basura se producen en toda la república en un solo día?

b) Un camión recolector de basura tiene capacidad para 7.5 toneladas. ¿Cuántos camiones se necesitan para recolectar la basura en todo el territorio nacional?

c) Si cada camión mide 86 dm de longitud, ¿qué longitud en km tendría una fila de todos los camiones recogedores de basura necesarios para mover la basura generada en un día?



Los trabajadores de recolección de basura y reciclaje figuran entre las 10 ocupaciones más peligrosas.

L2 Conversión entre unidades del sistema inglés

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

Marta acudió con su bebé a consulta con el pediatra y éste recomendó alimentarlo con 5 onzas de fórmula de leche en el biberón 5 veces al día. En la farmacia, Marta vio que había latas de fórmula en polvo de 2.775 lb y de 22.2 oz.

a) ¿A qué magnitud consideras que correspondan las onzas (oz)? ¿Y las libras (lb)? Explica tu respuesta.

b) ¿Qué envase contiene más leche en polvo?

c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

e) Describe el procedimiento que hiciste para saber la respuesta.

2. Reúnanse en equipo. Conozcan otras situaciones en las que se utilizan otras unidades de medida. Corrijan sus respuestas en caso necesario.

Desarrollo

Unidades del sistema inglés y equivalencias

Para comenzar, conozcamos algunas situaciones donde se requiere el uso de las unidades del sistema inglés.

> El **sistema inglés de unidades** [...] es aún usado ampliamente en los Estados Unidos de América y, cada vez en menor medida, en algunos países con tradición británica. Debido a la intensa relación comercial que tiene nuestro país con los EUA, existen aún en México muchos productos fabricados con especificaciones en este sistema.
>
> http://www.cenam.mx/singles.aspx

1. Analiza la tabla 1.43. Haz lo que se te pide.

Tabla 1.43. Unidades de medida

Magnitud	Sistema internacional	Sistema inglés
Longitud	Metro	Pie (ft)
Masa	Kilogramo	Libra (lb)
Tiempo	Segundo	Segundo (s)
Área	Metro cuadrado	Pie cuadrado (ft^2)
Volumen	Metro cúbico	Pie cúbico (ft^3)

a) ¿Cuáles de las unidades que se muestran del sistema inglés conoces? Escribe un caso en el que se usan. ____________________

____

b) ¿Cuáles unidades son iguales en ambos sistemas de medida? ____________

c) ¿Qué otras unidades, a parte de las que se muestran en la tabla, del sistema inglés conoces? Escribe sus usos. ____________________

____

2. Investiga a fin de completar la tabla 1.44 de equivalencias. Haz lo que se pide.

Tabla 1.44. Algunas equivalencias del sistema inglés (EUA)

Medida	Unidad de medida	Abreviatura	Equivalencias
Longitud	Pulgada	in	
	Pie	ft	12 in
	Yarda	yd	
	Milla	mi	
Masa	Onza	oz	
	Libra	lb	
	Tonelada	t	
Área	Pulgada cuadrada	in^2	
	Pie cuadrado	ft^2	
	Yarda cuadrada	yd^2	
	Milla cuadrada	mi^2	
Volumen (líquidos)	Onza líquida	fl oz	
	Pinta	pt	16 fl oz
	Cuarto	qt	
	Galón	gal	
	Barril	barril	
Volumen (sólidos)	Pulgada cúbica	in^3	
	Pie cúbico	ft^3	
	Yarda cúbica	yd^3	
	Milla cúbica	mi^3	5 451 776 000 yd^3

Conoce más
La medida de barril se usa sólo para el petróleo. Para saber más entra en http://edutics.mx/UYw. (Consulta: 20 de junio de 2018).

a) ¿Cuál es la equivalencia de 1 yarda en pulgadas? ____________________

b) ¿Cuál es la equivalencia de 1 galón en onzas líquidas? ____________________

c) ¿Cómo puedes convertir una cantidad dada en yardas a pies? ____________________

____

d) ¿Y una cantidad dada en onzas a libras? ____________________

____

e) Reúnanse en equipo. Perfeccionen las tablas de equivalencia y los procedimientos de conversión en el sistema inglés. Corrijan sus resultados si es necesario.

3. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder. Analicen la situación y respondan.
Cuando el papá de Julio se fue a comprar un pantalón vaquero, vio que estaban clasificados por ancho y largo y pidió uno de 32 por 34 pulgadas, ya que es muy alto. De hecho, jugó basquetbol, ya que mide 5 pies con nueve pulgadas, pero un compañero de equipo, el más alto, medía 6 pies y tres pulgadas. Además, cuando estudió en la universidad, fue mariscal de campo (*quarterback*) del equipo de futbol americano, para el que lanzó 3 520 yardas por pase.

Conoce más
En la página http://www.edutics.mx/UD9, encontrarás una breve explicación del origen del pie, la yarda y la pulgada. (Consulta: 20 de junio de 2018).

a) Si hay 12 pulgadas en un pie, ¿de cuánto es la diferencia de estatura entre el papá de Julio y el jugador más alto en el equipo de basquetbol? ______

b) Si hay 36 pulgadas en una yarda, ¿a cuántas pulgadas equivalen las yardas por pase? ______

c) ¿A cuántas millas equivalen la distancia por pases que lanzó el papá de Julio.

______

Factores de conversión en el sistema inglés

Ahora aplicaremos el factor de conversión en el caso de unidades del sistema inglés.

4. Completa la tabla 1.45.

Tabla 1.45

Conversión	Equivalencia	Factor de conversión	Operación	Resultado
15 ft a yd		$\frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ ft}}$	$15 \text{ ft} \times \frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ ft}}$	
3 yd a in				
1.3 gal a fl oz				
50 oz a lb				
150 in a ft				
75 fl oz a gal				

a) ¿Cómo determinas el factor de conversión? ______

______

______

______

b) Reúnanse en equipo. Determinen procedimientos que permitan la conversión más eficiente de unidades en el sistema inglés. Corrijan sus resultados en caso de que lo requieran.

Problemas de conversión de unidades

Ahora pongamos en práctica lo aprendido.

5. Convierte las siguientes medidas a las unidades que se piden.

a) 9.1 yd a ft ______
b) 3.5 lb a oz ______
c) 44 in a yd ______
d) 588 fl oz a gal ______
e) 115 oz a lb ______
f) 14 ft a yd ______
g) 10 ft a in ______
h) 1400 ft a mi ______

6. Resuelve lo que se pide.

a) En una tienda se encuentran dos presentaciones de jugo de naranja. La primera es un botellón de 1 gal y cuesta $86.00, en tanto que la segunda es una lata de 8 fl oz que cuesta $6.00. ¿Qué presentación es más conveniente comprar? ¿Por qué? ______________________________

____

Figura 1.37. La ballena azul (*Balaenoptera musculus*) es el animal vivo más grande que existe y puede alcanzar los 30 metros de longitud.

b) Martín está recopilando información para un periódico mural. Ha leído que la ballena azul (figura 1.37) puede alcanzar una masa de 220 t, mientras que un elefante africano puede llegar a tener 2 204 lb. Es conveniente que presente los datos con la misma unidad de medida. ¿Cómo pondrías los datos? Escríbelos. ____

____

c) Un empleado de una tienda traslada un recipiente de agua que tiene una capacidad de 7 500 fl oz. Si el recipiente está lleno a los dos tercios, ¿cuántos galones de agua lleva? ______________________________

d) Luisa se propuso correr 5 millas diarias. El lugar que encontró más accesible fue alrededor de un campo de fútbol americano que mide 120 yardas de largo por 53 yardas de ancho. ¿Cuántas vueltas necesita dar al campo para lograr su objetivo?

____

7. Completa la tabla 1.46. Escribe la medida donde corresponda: 2 oz, 2 lb, 150 lb, 8 oz, 4 oz. Luego escribe la conversión a lb o a oz, según corresponda.

Tabla 1.46

Objeto	Masa	Equivalencia
Comida para bebé		
Cuaderno		
Paquete de arroz		
Medida de leche en polvo para biberón		
Peso promedio de un adulto		

a) Reúnanse en equipo. Verifiquen que sus respuestas sean correctas. Argumenten o corrijan según el caso.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Marcos tiene que mover una caja de una habitación a otra, a través de una puerta. La caja mide 40 pulgadas de ancho, 50 de largo y 90 de altura, y la puerta mide 3.9 ft de ancho por 6.8 de alto.

a) ¿Podrá pasar la caja por la puerta?

L3 Conversión de unidades del SI al sistema inglés y viceversa

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

Ricardo y su papá vieron en un noticiero televisivo que una empresa petrolera anunció en el año 2017 el descubrimiento de seis nuevos **yacimientos** petrolíferos: dos en aguas profundas, con cerca de 7 000 ft de profundidad cada uno, dos en aguas **someras**, aproximadamente a 1 700 ft de profundidad y dos en tierra, sin conocer su profundidad. Los yacimientos permitieron incorporar reservas por mil millones de barriles de petróleo crudo.

a) Ricardo le preguntó a su papá cuál es la profundidad, en metros, de los pozos. ¿Qué responderías? Considera que 1 ft = 0.3048 m.

b) También preguntó a cuántos litros equivalían las reservas de petróleo. ¿Que responderías? Considera que 1 barril es aproximadamente igual a 159 L.

c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

d) Describe el procedimiento que hiciste para saber la respuesta a los problemas.

2. Reúnanse en equipo. Razonen sobre los procedimientos que permiten convertir unidades de diferentes sistemas. Corrijan sus respuestas si se requiere.

Glosario G

Yacimiento. Acumulación de material útil al ser humano, como el petróleo.

Somera. Superficial, poco profundo.

Desarrollo

Comparación entre unidades del SI y del sistema inglés

En las lecciones anteriores se han trabajado las unidades de medida del SI y las del sistema inglés. Establezcamos las equivalencias entre ambos sistemas.

1. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para responder. Completen la tabla 1.47 con las unidades de medida según su magnitud.

Tabla 1.47. Algunas magnitudes y sus unidades de medida

Magnitud	Unidades SI	Unidades sistema inglés
Longitud		
Masa		
Volumen		
Tiempo		

a) ¿Cómo pueden saber la cantidad de veces que cabe un pie en un metro?

____

b) ¿De qué manera obtienen las veces que cabe un centímetro en una pulgada?

____

c) Describan un procedimiento para saber la cantidad de litros que hay en un galón.

____

____

d) Analicen la información.

Algunas equivalencias entre las unidades de los sistemas SI e inglés son:

1 pulgada = 0.0254 m
1 pie = 0.3048 m
1 yarda = 0.9144 m
1 galón = 3.785 l = 0.0037 m^3
1 onza líquida = 0.0295 l = 0.0000295 m^3
1 libra = 0.4535 kg
1 onza = 0.0283 kg

1 m = 39.37 in = 3.2808 ft = 1.0936 yd
1 L = 0.2642 gal = 33.8983 fl oz
1 m^3 = 264.2 gal = 33 898.3 fl oz
1 kg = 2.205 lb = 35.3356 oz

e) Completen las oraciones para que sean ciertas.

- Si 1 yd equivale a __________ m, entonces 7 yd equivalen a __________ m.
- Si 1 fl oz equivale a __________ L, entonces 51 fl oz equivalen a __________ L.
- Si 1 lb equivale a __________ kg, entonces 7.2 lb equivalen a __________ kg.
- Si 1 m equivale a __________ ft, entonces 14 m equivalen a __________ ft.
- Si 1 kg equivale a __________ oz, entonces 0.4 kg equivalen a __________ oz.
- Si 1 L equivale a __________ gal, entonces 25 L equivalen a __________ gal.
- Si 1 in equivale a __________ cm, entonces 18 in equivalen a __________ cm.

f) ¿Qué procedimiento siguieron para convertir de una unidad del sistema inglés a una del SI? ¿Sirve también a la inversa? Expliquen: ____________________

____

g) Describan el procedimiento que utilizaron para resolver el último enunciado del inciso e). ____________________

____

h) Comparen sus resultados con los de otros equipos. Argumenten su validez o corrijan según sea necesario.

Notación

Para representar pies y pulgadas se pueden utilizar una y dos comillas, respectivamente. Por ejemplo, 6'4" representan 6 pies y 4 pulgadas.

Conoce más

Para explicar la definición de las unidades del sistema inglés y sus equivalencias en el SI, visita: http://www.edutics.mx/3C6. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Factores de conversión entre sistemas

Como en las lecciones anteriores, nos apoyaremos en los factores de conversión para resolver problemas entre unidades de ambos sistemas.

2. Completa la tabla 1.48. Analiza el ejemplo.

Tabla 1.48

Conversión	Equivalencia	Factor de conversión	Operación	Resultado
15 m a yd	1 yd = 0.9144 m	$\frac{1 \text{ yd}}{0.9144 \text{ m}}$		
30 gal a L				
5.8 ft a m				
3.6 kg a lb				

a) ¿Cómo determinaste el factor de conversión en cada caso? ____________________

____

b) Describe un procedimiento para usar factores de conversión en problemas sin equivalencia directa, por ejemplo, de mm a ft. ____________________

____

c) Completa la tabla 1.49.

Tabla 1.49				
Conversión	**Equivalencias**	**Factores de conversión**	**Operación**	**Resultado**
38 cm a ft	1 m = 100 cm 1 ft = 0.3048 m	$\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$ y $\frac{1\text{ ft}}{0.3048\text{ m}}$		
11 oz a g				
50 ml a fl oz				
550 yd a km				

d) Reúnanse en equipo. Elijan los métodos de conversión más eficaces en la conversión de unidades de diferentes sistemas. Corrijan si es necesario.

Problemas de conversión de unidades de medida

Ahora pongamos en práctica lo aprendido.

3. Convierte las siguientes medidas a las unidades que se piden.

a) 7.3 yd a m ____________ **b)** 3.5 kg a oz ____________

c) 44 in a cm ____________ **d)** 588 ml a fl oz ____________

e) 115 gal a m^3 ____________ **f)** 14 km a yd ____________

4. Un campo de fútbol americano mide 120 yardas de largo más 10 yardas finales (a cada lado del campo que son las zonas de anotación de cada uno de los equipos), y 160 pies de ancho. Roberto es ingeniero y lo han contratado para que haga una cancha de fútbol americano en un terreno de 5 000 m^2.

a) ¿Qué medidas, en metros, tiene un campo de fútbol americano? ____________

b) ¿Cuál es el área del campo? ____________________

c) ¿Podrá construir el campo de fútbol en el terreno? ¿Por qué? ____________

____

5. Mercedes recibió una invitación para participar en una variante de triatlón conocida como *ironman*, a realizarse en Hawái. El recorrido incluye: 2.4 mi a nado, 112 mi en bicicleta y 26.2 mi a pie.

a) El hermano menor de Mercedes quiere saber a cuántos kilómetros corresponde el recorrido total. ¿Qué le responderías? Explica. ____________

____

d) Una receta para elaborar un pastel está en el sistema inglés pero se tiene una balanza con unidades del SI. Los ingredientes que indica la receta son: 3 lb de harina, 1 lb de azúcar, 2 oz de levadura, 2 fl oz de clara de huevo, 4 fl oz de concentrado de jugo de naranja y $\frac{1}{2}$ gal de leche. Escribe las medidas de los ingredientes en unidades del SI para poder usar la balanza. ______________________________

____

____

e) Reúnanse en equipo. Revisen sus procedimientos y resultados. Argumenten sobre la validez de sus respuestas o hagan las correcciones necesarias.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En el año 2018, Pemex reportó que la producción de petróleo en nuestro país había bajado a un nivel histórico, pues llegó a 2 millones de barriles por día.
   a) Si un barril contiene 42 galones, ¿cuántos galones, litros y metros cúbicos de petróleo se produjeron?
   b) Considera la siguiente gráfica que muestra la producción de petróleo en México de 2004 a 2015.
   c) ¿Cuál fue la producción en 2015? ¿Y 2004? Da la respuesta en litros.
   d) ¿Cuál es la diferencia de la producción de los años anteriores con la de 2018?

Producción de petróleo crudo 2004 - 2015

Piensa y sé crítico

El pozo de exploración Ixtoc I explotó el 3 de junio de 1979 en la Bahía de Campeche, México. Para cuando el pozo fue puesto bajo control en marzo de 1980, se estima que 140 millones de galones de petróleo se habían derramado en la bahía. Este desastre es el segundo lugar en la lista de los mayores derrames de petróleo.

a) Ernesto está redactando un trabajo de investigación y requiere saber, para hacer un comparativo, a cuántos litros corresponde la cantidad de galones de petróleo derramados. Haz la conversión.

b) ¿A cuántas veces la producción del país en 2018 equivale el petróleo derramado?

S9 Histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea

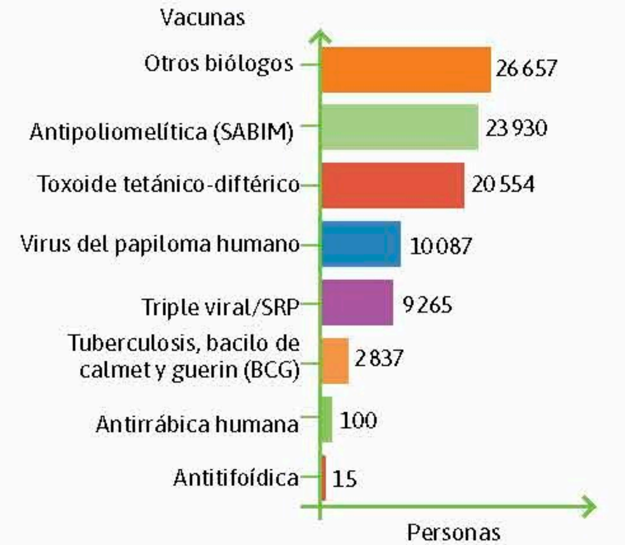
Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea.

L1 Histogramas

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
La gráfica muestra el número de vacunas aplicadas en instituciones del Sistema Nacional de Salud en México (2011). Fuente: http://edutics.mx/wXf. (Consulta: 20 de Septiembre de

Inmunizaciones aplicadas en instituciones del Sistema Nacional de Salud 2011



a) ¿Qué información se puede extraer de la gráfica?
b) Describe la gráfica como si la explicaras a alguien que no la está viendo.
c) ¿Qué semejanzas tiene esta gráfica con las gráficas de barras que ya has trabajado? ¿Qué diferencias hay?

2. Reúnanse en equipo. Identifiquen las situaciones que se pueden modelar a través de un histograma. Argumenten y corrijan si es necesario.

Fuente: https://www.profeco.gob.mx/encuesta/brujula/bruj_2014/bol292_vacunas.asp

Desarrollo

Lectura y construcción de histogramas

Infomáticas

El Servicio Sismológico Nacional (SSN) se fundó en septiembre de 1910 a raíz de la creación de la Asociacion Sismológica Internacional.

Analicemos las características de un histograma para luego obtener información de dicha gráfica o para construirla.

1. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder. Analicen el siguiente caso.
La tabla 1.50 contiene una lista de las magnitudes de los temblores ocurridos en México que reportó el Servicio Sismológico Nacional (SNN) a partir de las 23:49 h del 7 de septiembre de 2017, en el que ocurrió un gran terremoto. Los datos fueron obtenidos de la página http://www.ssn.unam.mx/.

Tabla 1.50. Magnitudes de sismos del 7 de septiembre de 2017

8.2	3.8	2.9	4.7	3.8	4.2	3.1	3.9	3.3	4.6	3.9	4.4	4.1	4.0	4.0
3.9	3.8	3.9	3.8	3.7	3.8	3.6	4.1	3.5	3.8	3.9	3.6	3.9	3.5	4.9
3.7	3.7	3.6	3.7	3.5	3.8	3.9	4.2	3.6	3.8	4.0	3.9	4.0	3.9	4.1
4.0	3.8	3.8	3.7	3.8	4.0	3.7	4.0	4.2	4.0	3.9	4.1	3.6	3.7	4.1

Estos datos se refieren a magnitudes que utilizan la escala de Richter. Hoy miden más aspectos que los considerados en el momento en que se inventó esta escala de medición para sismos.

a) ¿Cuántos temblores se registraron ese día en México? ____________

b) ¿Qué características observan en los datos registrados? ____________

____

c) ¿Cuántas intensidades (o magnitudes) distintas hubo? ____________

d) ¿Cuál fue la magnitud menor? ____________

e) ¿Cuál fue la magnitud mayor? ____________

f) Si requieren completar una tabla de frecuencias o dibujar una gráfica de barras con estos datos, ¿qué dificultades tendrán? Expliquen. ____________

____

Notación

En la escala de Richter, un temblor de magnitud 6 es 10 veces mayor que uno de magnitud 5, 100 veces mayor que uno de magnitud 4 y así sucesivamente. Por eso se le llama escala logarítmica.

2. Intercambien integrantes de equipo. Completen la tabla 1.51 organizando los datos de los temblores en los rangos especificados.

a) ¿De cuánto es el tamaño de cada rango? ____________

b) El primer temblor de la lista, ¿en qué rango está? ____________

c) ¿Cuántos temblores hubo de 7 grados o más? ____________

¿Y entre 1 y 1.9? ____________

d) El SSN considera sismos fuertes los que son mayores o iguales a la magnitud 5.5". ¿Cuántos sismos de ese tipo hubo? ____________

e) ¿Cuál fue el rango con el mayor número de sismos y cuantos fueron?

____

f) Si suman las frecuencias de la segunda columna, ¿qué obtienen? ____________

____

g) Mencionen ventajas de organizar los datos agrupando sus magnitudes en rangos. ____________

____

Tabla 1.51. Rangos de sismos

Rangos de magnitudes	Frecuencia de sismos en este rango
1 a 1.9	
2 a 2.9	
3 a 3.9	
4 a 4.9	
5 a 5.9	
6 a 6.9	
7 a 7.9	
8 a 8.9	
Total	

3. Intercambien integrantes y realicen lo que sigue en su cuaderno.
Dividan el eje horizontal en los rangos de la tabla 1.52 y tracen una gráfica de barras que muestre la frecuencia por rango de magnitudes de los sismos. Luego respondan lo que se les pide.

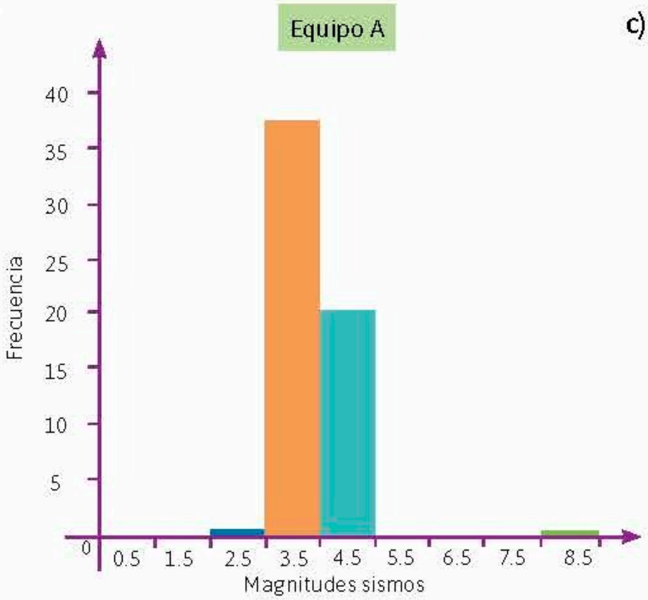
a) Escriban a la mitad de cada barra el valor del punto medio del rango de magnitudes o intervalo. ¿Qué significa este valor? ____________

____

b) ¿De qué manera la organización en intervalos ayudó al trazado de la gráfica? Expliquen. ____________

____

____



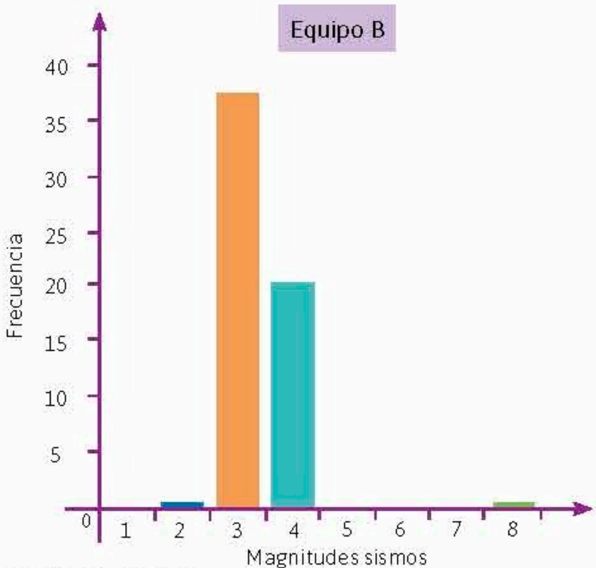


Figura 1.38. Gráficas realizadas por dos equipos.

c) Al realizar la actividad, hubo dos equipos que trazaron las gráficas que se muestran en la figura 1.38. Respondan en su cuaderno:

- ¿Cuáles son las semejanzas de ambas gráficas?
- ¿Cuáles son sus diferencias?
- ¿En qué gráfica las barras están juntas? ¿Por qué?
- ¿Cómo es el tamaño de los intervalos en ambas gráficas? Explica.
- ¿Cuál es el valor que representa las magnitudes de mayor frecuencia en cada gráfica? ¿Cuál consideras que es mejor representante y por qué?
- Si los intervalos son continuos y el punto medio representa un intervalo, la gráfica es un histograma. ¿Cuál de los dos equipos dibujó uno?
- ¿Por qué consideran que las barras de la gráfica del equipo A están pegadas unas con otras?

d) Individualmente, hagan en su cuaderno una tabla y la gráfica correspondiente para 4 categorías. Recuerden dibujar barras cuya base sea el ancho de cada intervalo y cuya altura sea la frecuencia correspondiente a cada intervalo.

e) ¿Qué es lo que se debe considerar para saber el número de intervalos adecuado para una gráfica? ______

______

______

______

f) Escriban otras características de un histograma, de acuerdo a lo realizado. ______

______

______

______

______

g) Reúnanse con otros equipos. Expresen las características que tiene un histograma. Verifiquen sus resultados, argumenten y corrijan según sea necesario.

Un **histograma** es una gráfica de barras donde cada clase se determina por un intervalo del mismo tamaño que los de las otras categorías o clases, y su altura representa la frecuencia, la proporción o el porcentaje que se tiene de dicha clase. Se dibujan las barras juntas entre sí, pues se representan cantidades continuas, y se marca el punto medio del intervalo a la mitad de la barra, el cual se denomina **marca de clase**.

4. Analiza la situación. Responde lo que se pide.
En algunas situaciones se trazan histogramas en un mismo gráfico, con el fin de mostrar varios datos y compararlos.
Por ejemplo, la figura 1.39 es de barras horizontales y dobles, llamada pirámide de población; en este caso, de la población dividida en hombres y mujeres, por rango de edades, en el año 2012.

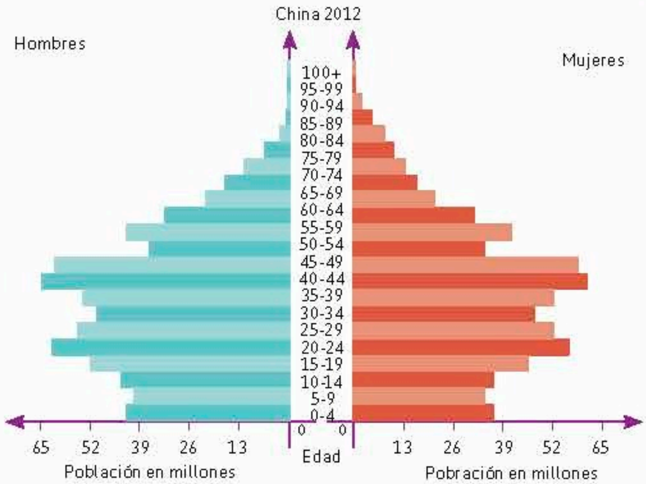


Figura 1.39. Histograma que muestra la distribución de la población china en 2012. (Fuente: U. S. Census Bureau).

a) ¿Por qué se le conoce como pirámide de población? Escribe tu conjetura. ______________________________

____

b) ¿Qué características de un histograma se presentan en la gráfica? ______________________________

____

c) ¿Qué representan los intervalos de cada barra? ______________________________

d) Con base en la información, determina los siguientes datos.
- ¿Cuántas niñas de 10 a 14 años había aproximadamente en China en 2012? ______________________________
- ¿Y cuántos niños del mismo rango de edad? ______________________________
- Describe cómo era la población de China en ese año, de acuerdo con lo que observas en la gráfica. ______________________________
- ¿Para qué rangos de edades había más mujeres que hombres en China? ______________________________
- ¿Para qué rangos de edades había más hombres que mujeres? ______________________________
- ¿Cuál era la población total aproximada de China en 2012? ______________________________

e) Reúnanse en equipo. Verifiquen sus resultados y analicen la utilidad de los histogramas para describir datos. Argumenten o corrijan si es necesario.

Conoce más
Para conocer características de los histogramas, así como para ver sus distintas formas, entra a: http://www.edutics.mx/U7o. (Consulta: 20 de junio de 2018).

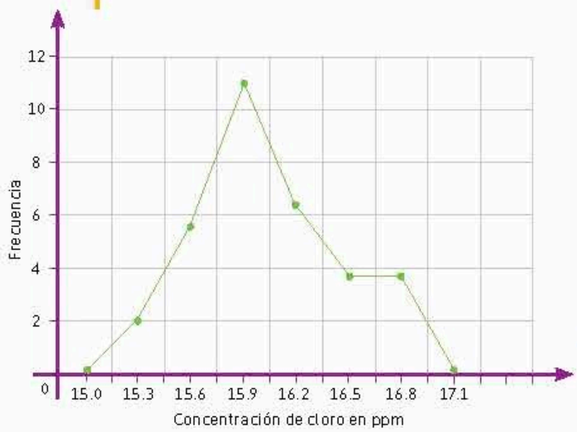
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad 1. Lee tus respuestas iniciales y, de ser necesario, responde, completa o corrige. Escribe los conocimientos o habilidades que al inicio necesitabas cimentar pero que ahora has consolidado.
2. Pregunta a tus compañeros cuántos minutos tardaron en llegar de su casa a la escuela y escríbelos en tu cuaderno.
   a) ¿Conviene organizar los datos en intervalos? Explica.
   b) Construye la tabla de frecuencias y traza un histograma que represente los datos.

L2 Polígonos de frecuencias

Inicio

1. Analiza la situación y responde lo que se pide.
Un químico ha estudiado la concentración de cloro en diversos productos de limpieza. Con sus datos ha elaborado la gráfica que se muestra.



Concentración de cloro en partes por millón (ppm) en diversos productos de limpieza.

a) Describe la gráfica.
b) ¿Qué semejanzas puedes encontrar con otros tipos de gráficas?
c) ¿Qué concentración de cloro ocurre con más frecuencia y cuántos productos la tienen?
d) ¿Los datos están agrupados en clases? Explica.
e) ¿Qué información utilizaste para responder el inciso d)?

2. Reúnanse en equipo. Identifiquen otras situaciones que se pueden modelar por medio de un polígono de frecuencias. Corrijan sus resultados si es necesario.

Desarrollo

Gráficas poligonales

Para establecer la diferencia entre una gráfica poligonal y un polígono de frecuencias, conozcamos las características de la primera.

1. Reúnanse en equipo. Definan la estrategia y los procedimientos para responder. Analicen la situación.
Según la Organización de las Naciones Unidas (ONU), las ciudades o **megalópolis** más pobladas del mundo en el año 2015 eran las que aparecen en la tabla 1.52.

Glosario G

Megalópolis. Área urbana de grandes dimensiones formada por la unión de varias zonas metropolitanas, tal como la Ciudad de México que incluye alcaldías y municipios del Estado de México, como Naucalpan.

Tabla 1.52. Ciudades más pobladas en 2015

Núm.	País	Ciudad	Población (en millones)	Porcentaje
1	Japón	Tokio	38.00	
2	India	Delhi	25.70	
3	China	Shanghai	23.74	
4	Brasil	Sao Paulo	21.07	
5	India	Bombay (Mumbay)	21.04	
6	México	México (CDMX)	21.00	
7	China	Pekín (Beijing)	20.38	
8	Japón	Osaka	20.24	
9	Egipto	El Cairo	18.77	
10	EUA.	Nueva York/Newark	18.59	
11	Bangladesh	Dhaka	17.60	
12	Pakistán	Karachi	16.62	
13	Argentina	Buenos Aires	15.18	
Total				

Fuente: Organización de Naciones Unidas (ONU).

a) Completen la tabla anterior calculando el total de habitantes de esas ciudades y los porcentajes correspondientes respecto al total.

b) Tracen una gráfica de barras que describa la tabla, colocando en el eje horizontal las ciudades o los grupos que determinaron, y en el vertical sus poblaciones o los rangos.

c) Marquen el punto medio de cada barra en la parte superior y unan esos puntos medios con líneas rectas. ¿Qué forma se describe? ____________________

____

d) ¿Los segmentos de línea son crecientes o decrecientes? Expliquen. __________

____

e) Elaboren una gráfica similar, sin incluir las barras (sólo con líneas), para las poblaciones y sus porcentajes.

f) ¿Cómo es la forma de ambas gráficas? Expliquen. ____________________

____

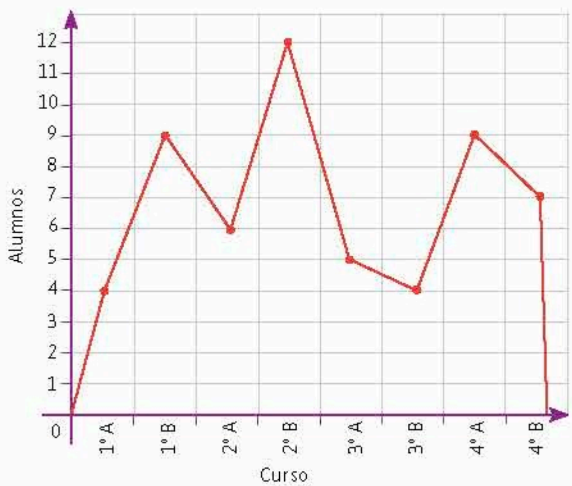
g) Describan las características de una gráfica poligonal a partir de lo que han observado. __________

____

____

h) Reúnanse con otros equipos. Expliquen las características de una gráfica poligonal al revisar sus resultados. Argumenten y corrijan si es necesario.

Una **gráfica poligonal** es una gráfica formada por segmentos de línea que unen los puntos en el plano determinados por clases y sus frecuencias. Un ejemplo de este tipo de gráfica es el siguiente:



Lectura y construcción de polígonos de frecuencias

A continuación, trabajaremos las características de un polígono de frecuencias con el fin de trazarlo o bien observar una gráfica y extraer información de ella.

Notación

Cuando se agrupan datos en clases, el punto medio del rango que ocupa una clase se denomina **representante de clase.**

2. Reúnanse en equipos. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder. Con la información de la tabla 1.52, realicen lo que se les pide.

a) Completen la tabla 1.53 calculando la frecuencia de cada intervalo, el representante de clase y el porcentaje correspondiente del rango.

Tabla 1.53. Intervalos de población

Intervalos	Frecuencia de ciudades con dicha población	Representante de clase	Porcentaje
10 – 14.9			
15 – 19.9			
20 – 24.9			
25 – 29.9			
30 – 34.9			
35 – 39.9			
Total		-----	

b) De acuerdo con la información obtenida, tracen el histograma que muestra los intervalos poblacionales y sus frecuencias.

c) De manera similar a una gráfica poligonal unan los puntos medios de las barras, en la parte superior, mediante líneas rectas. ¿Qué forma se describe? ____________

____

d) ¿Qué diferencias hay con la gráfica poligonal de la actividad anterior?

____

e) En su cuaderno, tracen el polígono de frecuencias de los porcentajes por número de ciudades.

f) Describan las características que tiene un polígono de frecuencias. ____________

____

Un **polígono de frecuencias** es una representación gráfica de datos similar al histograma. A diferencia de éste, que usa barras, se marcan los puntos con las alturas dadas por las frecuencias. Estos puntos se unen entre ellos formando una especie de polígono irregular que se cierra con el eje horizontal.

3. Analiza la situación y haz lo que se pide.
La figura 1.40 muestra las edades del personal científico y técnico que laboraba en las instituciones de investigación **agropecuaria** en México, en el área de ciencias biológicas, en el año 2010.

a) Describe la información de la gráfica.

____

____

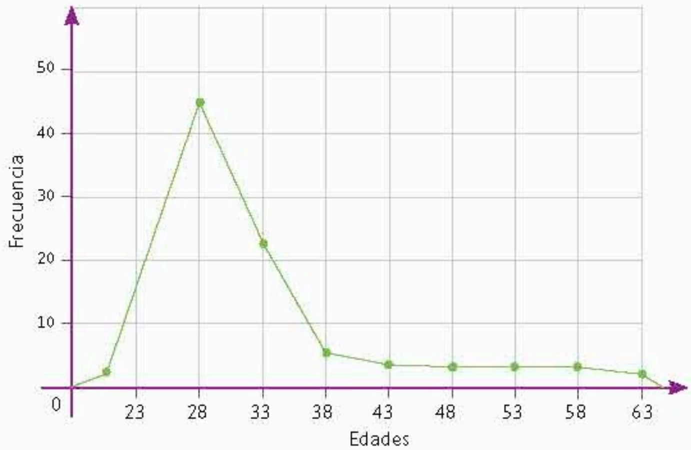


Figura 1.40. Polígono de frecuencias.

b) ¿Qué características de un polígono de frecuencias se presentan en la gráfica?

____

c) ¿Qué indican los números que aparecen en la gráfica? _______________

____

d) Con base en la información, determina los siguientes datos.

- ¿Cuál es la edad más frecuente del personal? _______________
- ¿Cuál es la edad menos frecuente? _______________
- ¿Cómo era la población en general? _______________
- ¿Cuál es el intervalo de edad más frecuente en las instituciones en el año 2010?

____

- ¿Cuál era la población total aproximada que laboraba en las instituciones de investigación agropecuaria en 2010? _______________

e) Reúnanse en equipo. Expliquen la utilidad de los polígonos de frecuencias en la representación de datos. Argumenten o corrijan si es necesario.

Glosario

Agropecuaria. Adjetivo usado para designar un tipo de actividad económica que se basa en la producción de alimentos a partir del cultivo y de la ganadería.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Elige tres asignaturas que curses en tus estudios actuales. Pregunta a tus compañeros de grupo sus calificaciones de esas tres asignaturas.
   a) ¿Cómo es la variabilidad de los datos? Explica en qué basaste tu respuesta.
   b) En una misma gráfica, traza el polígono de frecuencias de las tres asignaturas (es decir, dibuja tres gráficas "encimadas").
   c) Registra las observaciones que hagas del desempeño del grupo en las asignaturas. Señala qué parte de las gráficas te permitió hacerlas y reflexiona sobre otros hechos que supiste al respecto.

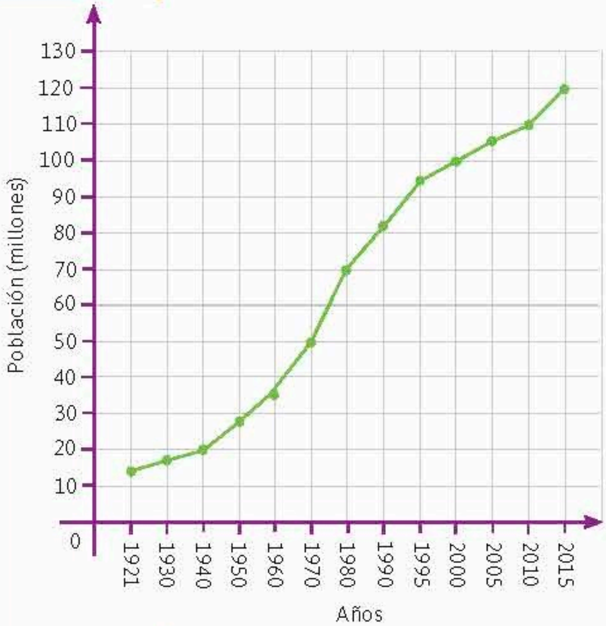
Conoce más

Entra a la liga: http://www.edutics.mx/U7J. En ella encontrarás una explicación sobre polígonos de frecuencias y su comparación con los histogramas. (Consulta: 20 de junio de 2018).

L3 Gráficas de línea

Inicio

1. Analiza la siguiente situación, observa la imagen y responde lo que se pide.



La siguiente gráfica se tomó de la página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) (http://www.beta.inegi.org.mx/temas/estructura), en la cual se muestra la población de México desde 1921 hasta el 2015.

a) ¿De cuánto ha sido el aumento de la población desde 1921 hasta 2015?

b) ¿Entre qué años se dio el mayor crecimiento de la población? Explica por qué.

c) ¿A qué tipo de gráfica se asemeja esta? Explica.

d) ¿Qué diferencias encuentras entre esta gráfica con las del tipo que mencionas?

e) ¿Qué información utilizaste para argumentar en los incisos anteriores?

f) Di las características de la gráfica que no utilizaste en tus argumentos.

2. Reúnanse en equipo. Identifiquen las situaciones que se pueden modelar por medio de una gráfica de línea. Argumenten y corrijan sus resultados en caso necesario.

Desarrollo

Lectura y construcción de gráficas de línea

Tabla 1.54. Pasajeros por mes que usan el sistema M1

Mes	Número de pasajeros (miles)	Porcentaje respecto al total
Enero	323.5	
Febrero	358.9	
Marzo	371.8	
Abril	297.9	
Mayo	385.9	
Junio	392.4	
Julio	360.7	
Agosto	377.9	
Septiembre	384.0	
Octubre	357.6	
Noviembre	375.6	
Diciembre	326.7	
Total		

Fuente: INEGI.

Analicemos las características de una gráfica de línea para luego obtener información y construir dicha representación.

1. Reúnanse en equipos. Convengan la estrategia y los procedimientos para responder.
La tabla 1.54 muestra la cantidad de pasajeros por cada mes del año 2017 que traslada el servicio de autobuses urbanos del gobierno de la Ciudad de México, conocido como Sistema de Movilidad M1. Dicha información fue tomada de la página del INEGI, mencionada anteriormente.

a) Completen la tabla calculando el porcentaje de pasajeros trasladados por mes según el total del año.

b) ¿Cómo se organizan los datos en la tabla? ______________________

c) ¿En qué meses se tiene el mayor número de pasajeros trasladados? ______________________

d) ¿En qué meses hubo menor número de usuarios de este transporte? ______________________

e) ¿Consideran que, al avanzar el tiempo, los datos muestran algún patrón? A esto se le conoce como tendencia. Expliquen.

____

____

2. Intercambien integrantes. A partir de los datos analizados, tracen una gráfica poligonal que muestre la cantidad de pasajeros por mes.

a) ¿Cómo se refleja de manera gráfica la tendencia que mencionaron? ____________

b) ¿Qué semejanzas observan entre esta gráfica y la de un polígono de frecuencias?

____

____

c) ¿Cuáles son las diferencias entre estos tipos de gráficas? ____________

____

d) Tracen otra gráfica que muestre los porcentajes por mes. Compárenla con la anterior y discutan sobre la forma de ambas gráficas.

e) De acuerdo con lo que han trabajado, describan las características de las gráficas de este tipo. ____________

____

3. Intercambien integrantes de equipos. Definan la estrategia y los procedimientos para responder.

Tabla 1.55. Miles de barriles diarios producidos en México				
Mes	2014	2015	2016	2017
01	2 505	2 251	2 258	2 019
02	2 501	2 331	2 214	2 015
03	2 469	2 319	2 216	2 017
04	2 477	2 201	2 176	2 011
05	2 489	2 227	2 174	2 019
06	2 435	2 246	2 177	2 007
07	2 388	2 271	2 157	1 985
08	2 414	2 254	2 143	1 930
09	2 389	2 271	2 113	1 730
10	2 362	2 278	2 103	1 901
11	2 362	2 276	2 071	1 866
12	2 353	2 275	2 035	1 872

Fuente: PEMEX.

La tabla 1.55 muestra la producción de petróleo crudo en México entre los años 2014 a 2017, de acuerdo con los datos reportados por Pemex. Los números de la tabla se calculan promediando la producción diaria de cada mes.

a) ¿En qué mes se tuvo la menor producción de barriles? ______________________

b) ¿En cuántos miles de barriles disminuyó la producción de 2016, comparando las cantidades del primero y el último mes?

____

c) Tracen sobre el mismo eje horizontal, con los meses, cuatro gráficas de línea mostrando la producción de petróleo. Usen un color distinto para la gráfica correspondiente a cada año e indiquen el color correspondiente a esos años.

Conoce más

Entra a la página: http://www.edutics.mx/U7w, donde hay una explicación detallada sobre cómo elaborar gráficas de línea. (Consulta: 20 de junio de 2018).

d) ¿Qué ventajas tiene esta forma de elaborar la gráfica? ______________________

____

e) ¿Se puede apreciar una tendencia en la gráfica respecto a la producción de petróleo crudo en México? Descríbanla. ______________________

____

f) Reúnanse con otros equipos. Validen sus resultados mediante argumentaciones y correcciones. Describan las características de las gráficas de línea.

Una **gráfica de línea** es una representación de un conjunto de datos en la que se marcan los cruces de las frecuencias y las clases, las cuales son por periodos de la misma duración. Los puntos se unen por medio de líneas rectas, por lo que se visualiza la tendencia de los datos a través del tiempo.

4. Analiza la situación y realiza lo que se te pide.

La figura 1.41 es una gráfica de líneas superpuestas de las preferencias de aficionados por 4 equipos de futbol, entre 2001 y 2007.

a) Describe la información de la gráfica. ______

______

______

b) ¿Qué características de una gráfica de línea se presentan en la imagen? ______

______

c) ¿Son iguales los periodos en que se agrupa la información? Explica. ______

______

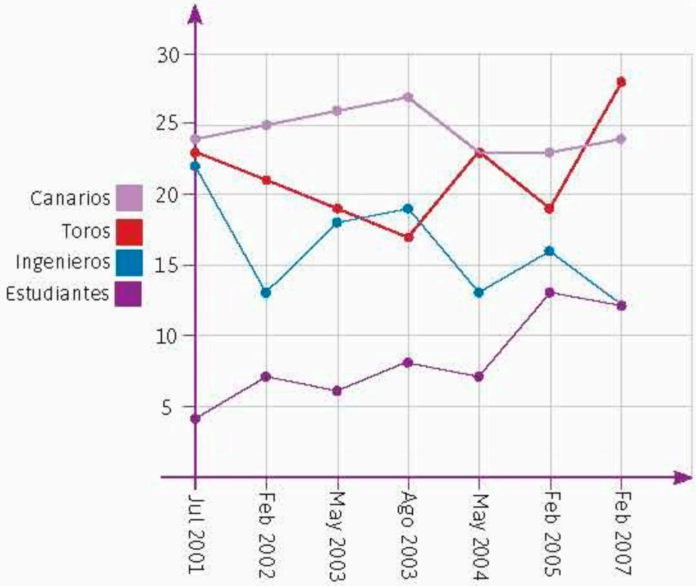


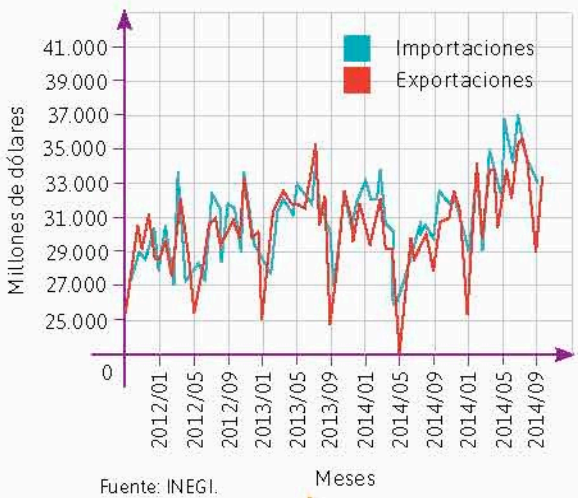
Figura 1.41. Gráfica de línea con las preferencias de equipos de la liga mexicana de futbol.

d) Reelabora la gráfica con periodos de la misma duración y compara ambas gráficas.

e) Reúnanse en equipo. Expliquen la utilidad de las gráficas de línea en la representación de datos. Argumenten o corrijan si es necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Algunas gráficas de línea muestran varias series de datos en el mismo gráfico, usando diferentes colores. La balanza comercial de México, es decir, la diferencia entre exportaciones e importaciones, con datos del INEGI, se representa en la gráfica, cuyos valores se dan en millones de dólares.
   a) ¿Qué características de una gráfica de línea se aprecian?
   b) ¿En qué tiempo fueron mayores las importaciones?
   c) ¿En qué tiempo se exportó menos?
   d) Describe los procedimientos que utilizaste para conocer estas cantidades. Comparte tus resultados con tus compañeros.



L4 Elección de la representación gráfica más adecuada

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
   El mapa de la figura muestra los epicentros de los 4 165 sismos ocurridos en el territorio mexicano durante el mes de febrero de 2018, de acuerdo con los reportes de la página del Servicio Sismológico Nacional.

Fuente: Servicio Sismológico Nacional

   a) ¿Cómo se encuentra organizada la información en el mapa?
   b) Supón que los datos los puedes descargar de la página del Servicio Sismológico Nacional. ¿Qué tipo de gráfica se puede realizar con dicha información? Explica.
   c) ¿Qué datos adicionales necesitas para elaborar un histograma? ¿Cuáles requieres para un polígono de frecuencias o una gráfica de línea? Explica por qué en cada tipo de gráfica.
   d) Di en qué te basaste para responder las preguntas anteriores, y qué información no te parece relevante.

2. Reúnanse en equipo. Perfeccionen las técnicas para determinar las situaciones que se describen con cada tipo de gráfica. Argumenten y corrijan sus resultados en caso necesario.

Desarrollo

Comparación entre representaciones gráficas

Trabajemos con las características de cada tipo de gráfica que ya conoces para identificar su utilidad.

1. Reúnanse en equipos. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder.
   En la figura 1.42 se observan los porcentajes de la población que reciben ciertas cantidades de salarios mínimos, de acuerdo a datos del INEGI de diciembre de 2016. Una empresa dedicada al análisis de datos desea observar si hay una tendencia de los datos al ir aumentando la cantidad de salarios, por lo que considera elaborar un histograma.

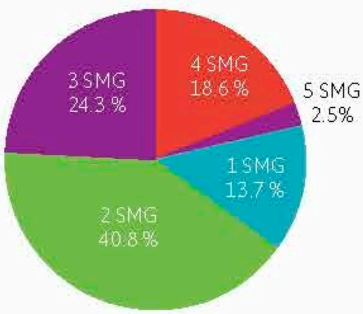


Figura 1.42. Gráfica circular.

   a) ¿Cómo se encuentra organizada la información de la gráfica? ______________________
   ____
   b) ¿Con qué otro tipo de gráficas pueden representar la información? Expliquen.
   ____
   c) ¿Existe alguna tendencia entre los datos? ¿De qué manera se aprecia en la gráfica circular? ______________________
   d) Elaboren un histograma con los datos que presenta la gráfica circular.

Infomáticas

El Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) se fundó en 1983, integrando cuatro direcciones generales de la Presidencia de la República.

e) ¿Qué características tienen los datos que se pueden representar mediante un histograma? ______________________________

____

2. Intercambien integrantes. Analicen la información y realicen lo que se les pide. La tabla 1.56 contiene los datos de la población de México, de manera total y luego por género, registrada en el Censo de Población y Vivienda 2010. La información aparece clasificada por rangos de edad.

Tabla 1.56. Rangos de edad de la población en México 2010

Rangos de edades	Totales	Hombres	Mujeres	Rangos de edades	Totales	Hombres	Mujeres
0 – 4	10 528 322	5 346 943	5 181 379	50 – 54	5 064 291	2 402 451	2 661 840
5 – 9	11 047 537	5 346 943	5 443 362	55 – 59	3 895 365	1 869 537	2 025 828
10 – 14	10 939 937	5 604 175	5 392 324	60 – 64	3 116 466	1 476 667	1 639 799
15 – 19	11 026 112	5 547 613	5 505 991	65 – 69	2 317 265	1 095 273	1 221 992
20 – 24	9 892 271	5 520 121	5 079 067	70 – 74	1 873 934	873 893	1 000 041
25 – 29	8 788 177	4 813 204	4 582 202	75 – 79	1 245 483	579 689	665 794
30 – 34	8 470 798	4 205 975	4 444 767	80 – 84	798 936	355 277	443 659
35 – 39	8 292 987	4 026 031	4 328 249	85 – más	703 295	298 739	404 556
40 – 44	7 009 226	3 964 738	3 658 904	No especificado	1 397 406	700 219	697 187
45 – 49	5 928 730	3 350 322	3 104 366				

Fuente: Censo de Población y Vivienda 2010, inegi.

a) ¿Qué tipo de gráficas es posible elaborar con esta información? Expliquen.

____

____

b) Con la información de la tabla, construyan un polígono de frecuencias en el espacio de la siguiente página.

c) ¿Dirían que nacen el mismo número de hombres que de mujeres? Expliquen. ______

______

d) ¿Qué características tienen los datos que se pueden representar mediante un polígono de frecuencias? ______

______

______

3. La tabla 1.57 muestra el porcentaje de nacimientos registrados por madres adolescentes, que para este estudio incluyó a todas las mujeres menores de 20 años, de 1995 a 2016, de acuerdo con datos del INEGI. Reunidos en equipos, analicen y respondan lo que se les pide.

a) ¿Qué tipos de gráficas son adecuadas para representar los datos de la tabla? Expliquen. ______

______

______

______

Tabla 1.57. Porcentaje de nacimientos con madres adolescentes

Año	Porcentaje	Año	Porcentaje
1995	16.5	2006	17.2
1996	16.4	2007	17.8
1997	16.3	2008	18.3
1998	16.5	2009	18.8
1999	16.9	2010	18.8
2000	17.1	2011	19.2
2001	17.2	2012	19.4
2002	17.2	2013	19.4
2003	16.8	2014	19.2
2004	17.2	2015	18.2
2005	17.4	2016	17.8

Fuente: INEGI.

b) Con la información de la tabla, construyan una gráfica de línea.

Conoce más

En la liga http://www.edutics.mx/U7i encontrarás una breve descripción de los tipos de gráficas para representar información. (Consulta: 20 de junio de 2018).

c) Discutan si hay tendencias y qué piensan al respecto.

d) ¿Qué características tienen los datos que se pueden representar mediante una gráfica de línea? ____

____

e) Reúnanse con otros equipos. Perfeccionen la determinación de las características de los datos que permiten la construcción de cada tipo de gráfica estudiada mediante la revisión de sus respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. La densidad de población es un número que indica la cantidad de habitantes por unidad de área, por ejemplo, en un km^2. La tabla 1.59 muestra las densidades aproximadas de cada estado de la república mexicana, de acuerdo con datos tomados del Censo de Población y Vivienda 2010.

Tabla 1.59. Densidad poblacional por estados de México

Estado	Densidad	Estado	Densidad	Estado	Densidad	Estado	Densidad
Aguascalientes	212	Ciudad de México	5 920	Morelos	364	Sinaloa	48
Baja California	45	Durango	13	Nayarit	39	Sonora	15
Baja California Sur	9	Guanajuato	179	Nuevo León	73	Tabasco	91
Campeche	14	Guerrero	53	Oaxaca	41	Tamaulipas	41
Coahuila	18	Hidalgo	128	Puebla	168	Tlaxcala	293
Colima	116	Jalisco	94	Querétaro	156	Veracruz	106
Chiapas	65	México	679	Quintana Roo	30	Yucatán	49
Chihuahua	14	Michoacán	74	San Luis Potosí	42	Zacatecas	20

Fuente: Censo de Población y Vivienda 2010, INEGI.

a) ¿Se pueden representar los datos mediante una de las gráficas estudiadas? Explica.

b) ¿Qué procedimiento aplicas para obtener un histograma o un polígono de frecuencias?

c) ¿Qué información adicional se requiere para construir una gráfica de línea?

Piensa y sé crítico

¿Se puede construir un polígono de frecuencias que a su vez sea gráfica de línea? Explica tu respuesta.

U1 Lo que aprendí

1. Explica con tus palabras los siguientes conceptos o procedimientos. Compara tus anotaciones con las de tus compañeros y, junto con tu profesor, verifiquen que sean correctas.

Concepto	Mi explicación	Ejemplo
Multiplicación de un número fraccionario por un número decimal	Para multiplicar un número fraccionario por un decimal se puede convertir el decimal en fracción y usar la multiplicación de fracciones o viceversa.	$\left(\frac{7}{24}\right) \times (3.24) = \left(\frac{7}{24}\right) \times \left(\frac{324}{100}\right) = \frac{7 \times 324}{100 \times 24} = \frac{189}{200}$ $\left(\frac{1}{4}\right) \times (9.32) = (0.25) \times (9.32) = 2.33$
División entre fracciones		
Reglas para multiplicar y dividir con números con signo en general		
Potencia de un número		
Producto de potencias enteras de la misma base		
Cociente de potencias enteras de la misma base y potencias negativas		
Diagonal de un polígono y número total de diagonales		
Medidas de los ángulos interiores, exteriores y centrales de un polígono regular		
Conversión de unidades del sistema SI		
Conversiones de unidades del SI al sistema inglés y viceversa		
Histogramas		
Polígonos de frecuencias y gráficas de línea		

2. Una receta para hacer pasteles indica que hay que poner $\frac{3}{4}$ de kilogramo de harina para cocinar un pastel. Sofía tendrá una fiesta y quiere hornear 3 pasteles.

a) ¿Cuántos kilogramos de harina necesita? ____________________

b) Si la harina se vende en bolsas de un kilogramo y medio, ¿cuántas bolsas debe comprar?

____

3. Completa la tabla.

Expresión	Desarrollo	Expresión con una sola potencia	Resultado
$\frac{3^5}{3^2}$			
$(2^3) \times 2^3$			
$\frac{(-4)^5}{(-4)^5}$			
$\frac{(0.001)^3}{(0.1)^9}$			
$(2^2)^4$			
$\frac{6^6}{6^8}$			
$(10^{-3}) \times 10^7$			

4. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 15 lados? ____________________

5. Un polígono regular tiene 16 lados.

a) ¿Cuánto mide un ángulo central de ese polígono? ____________________

b) ¿Cuánto mide un ángulo exterior de ese polígono? ____________________

c) ¿Cuánto mide un ángulo interior de ese polígono? ____________________

6. Un barril de petróleo equivale a 42 galones. ¿Cuántos litros contiene? ____________________

7. Se desea conocer de manera gráfica la variación del tipo de cambio del dólar estadounidense en pesos mexicanos en 2016 a partir de la tabla. Traza en una hoja en blanco la gráfica correspondiente.

Mes	Tipo de cambio	Mes	Tipo de cambio
Ene	18.45	Jul	18.86
Feb	18.16	Ago	18.57
Mar	17.40	Sep	19.50
Abr	17.39	Oct	18.84
May	18.45	Nov	20.55
Jun	18.91	Dic	20.73

Fuente: http://www.inegi.gob.mx

8. Compara tus respuestas de toda la sección con las de tus compañeros. ¿Son correctas? ¿Tuvieron dificultades para responder o ejemplificar algún contenido? Compartan sus experiencias, argumenten sus respuestas y expliquen sus ejemplos. Repasen los contenidos que consideren necesario.

Los polígonos y la estética

1. Lee lo siguiente.

Una *Teselación de Penrose* se nombra así en honor al matemático Roger Penrose, quien las investigó en la década de los años setenta.

Aunque no lo parezca, las figuras geométricas, como los polígonos regulares, forman parte de nuestra vida y podemos encontrarlas por todas partes, ¿lo habías notado? Puedes hallarlas en las construcciones artificiales (por ejemplo, en los edificios) y en la la naturaleza. Incluso, estas figuras son tan apreciadas por su estética que suelen utilizarse como adornos o para la elaboración de obras de arte. Un ejemplo perfecto son los teselados, un patrón de figuras que cubren una superficie plana donde no hay superposición ni espacios vacíos, y que son utilizados desde la antigüedad para formar pavimentos, muros, mosaicos, grabados, etcétera. Puedes apreciar su belleza y atractivo visual en la imagen derecha, ¿qué te provoca la imagen?

Aprecio y gratitud

En ocasiones no apreciamos lo que somos o tenemos, ¿opinas lo mismo? El aprecio surge de reconocer los elementos de nosotros mismos, los demás e incluso el entorno, que nos benefician y nos hacen sentir bien; implica disfrutar la vida, la belleza y las acciones y cualidades propias y de los otros. La gratitud es una emoción placentera, derivada del aprecio, y se manifiesta con acciones para cuidar y mantener aquello que nos trae bienestar.

Una estrategia

Para sentir aprecio y expresar gratitud debemos pensar en el objeto, persona o lugar y sus cualidades; identificar los beneficios que nos trae y los sentimientos positivos que nos genera; por último, idear una forma en que podamos retribuir la bondad que percibimos mediante expresiones o acciones para favorecerla. Verás que al hacer esto te sentirás muy bien, mejorarás tus relaciones y evitarás actitudes pesimistas. ¡Inténtalo!

2. En equipo, visiten un museo de arte moderno, una casa de cultura, una galería o algún centro cultural e identifiquen una obra artística conformada por polígonos que llame su atención.

a) Tomen una fotografía digital de la obra (asegúrense de que esté permitido). Luego, con un *software* de dibujo, identifiquen y marquen los polígonos y los elementos de los mismos, que la conforman. Discutan acerca de si hay alguna razón geométrica para la disposición de los elementos de la obra y si esto influye en su estética.

b) Individualmente, hagan una obra similar a la que fotografiaron y titúlenla. Reflexiona: ¿consideras que tu obra es bella? ¿Por qué? ¿Qué sientes al mirar tu trabajo? ¿Influye la geometría en tu obra?

c) Usen la obra que han elaborado para expresar la gratitud que sienten hacia las personas que les rodean. Reflexionen a quién pueden regalar su trabajo como una forma de retribución por el bienestar que les causa.

Nombre: ______________________ Fecha: ________ Grupo: ________

Subraya la opción correcta.

1. ¿Cuál es la fracción equivalente a la multiplicación $\frac{1}{4} \times 0.32$?

   a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{25}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{13}$

2. ¿Cuál es la fracción equivalente a la división $1\frac{3}{8} \div \frac{1}{8}$?

   a) $\frac{11}{64}$ b) 3 c) 11 d) $\frac{3}{64}$

3. El área de un triángulo que tiene como altura $\frac{3}{4}$ m y como base $\frac{16}{9}$ m es

   a) $\frac{2}{3}$ m^2 b) $\frac{4}{3}$ m^2 c) $\frac{3}{2}$ m^2 d) $\frac{3}{4}$ m^2

4. Un negocio pierde $1 252.00 al mes, lo cual podemos denotar con el número negativo –$1 252.00. Si en sus libros de contabilidad, el negocio tiene un saldo de –$11 268.00, ¿cuántos meses lleva perdiendo dinero el negocio?

   a) 8 b) 12 c) 9 d) 11

5. Al simplificar $\frac{6^5}{6^2}$ se obtiene

   a) 6 b) 3 c) 3^2 d) 6^3

6. La expresión equivalente a $7^3 \times 7^5$ con un solo exponente es

   a) 7^2 b) 7^{35} c) 7^{15} d) 7^8

7. La expresión equivalente a $(5^3)^6$ con un solo exponente es

   a) 5^3 b) 5^9 c) 5^{36} d) 5^{18}

8. Si un cuadrado tiene área de 50.4 m^2 entonces su lado mide aproximadamente:

   a) 6.1 m b) 5.8 m c) 25.2 m d) 7.1 m

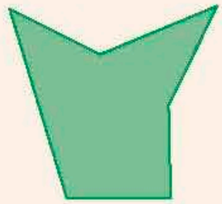
9. Si un galón de impermeabilizante vale $234.00, entonces 1 L vale aproximadamente:

   a) $32.00 b) $48.00 c) $60.00 d) $83.00

10. Roberto se entrenará para una carrera de maratón. Comenzará corriendo 2 millas, tres días a la semana. ¿Qué rango de kilómetros recorrerá en total en la primer semana?

    a) 4 – 5 b) 7 – 8 c) 9 – 10 d) 11 – 12

11. ¿Cuántas diagonales tiene el siguiente pentágono?



a) 3
b) 9
c) 15
d) 18

12. ¿Cuál es la mejor aproximación al valor de un ángulo interno del heptágono regular de la figura?

a) 128°
b) 135°
c) 120°
d) 108°

13. ¿Cuántos litros contienen 3 botes de aceite para autos como los de la imagen?

a) 11.35 L
b) 12.48 L
c) 13.5 L
d) 10.8 L

14. De acuerdo con la gráfica de línea, ¿en qué trimestre se tuvo el mayor ingreso per cápita en México? (Fuente: http://www.jornada.unam.mx/2013/02/20/politica/002n1pol)

a) 2012-4
b) 2006-4
c) 2009-2
d) 2011-2

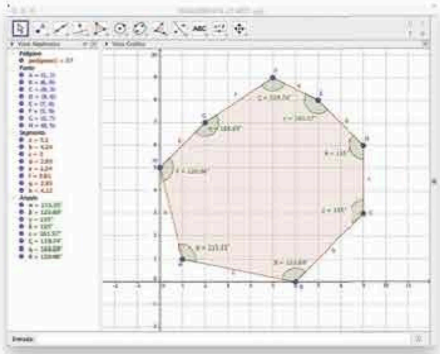
Reflexiono sobre mi desempeño

Coevaluación. Reúnete con un compañero para compartir y validar sus respuestas.

Heteroevaluación. Guiados por su maestro, revisen las secuencias que estudiaron en la unidad para identificar cuáles temas comprendieron mejor, y en cuáles tuvieron dificultades. Propongan una estrategia de trabajo para favorecer su aprendizaje.

Suma de los ángulos interiores de un polígono

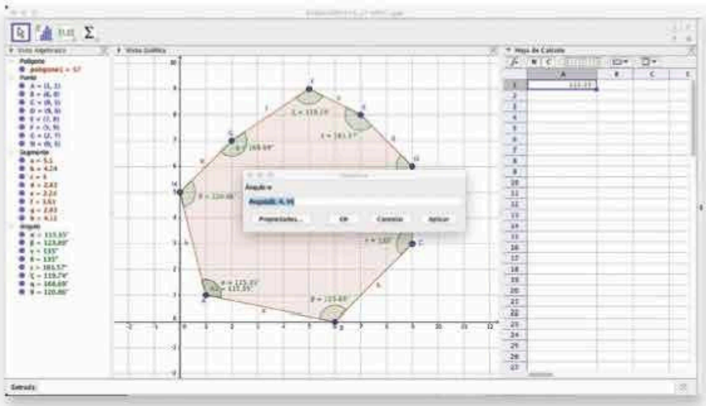
En esta actividad trabajaremos con el programa de geometría dinámica *Geogebra* para obtener la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono cuyas dimensiones pueden modificarse.



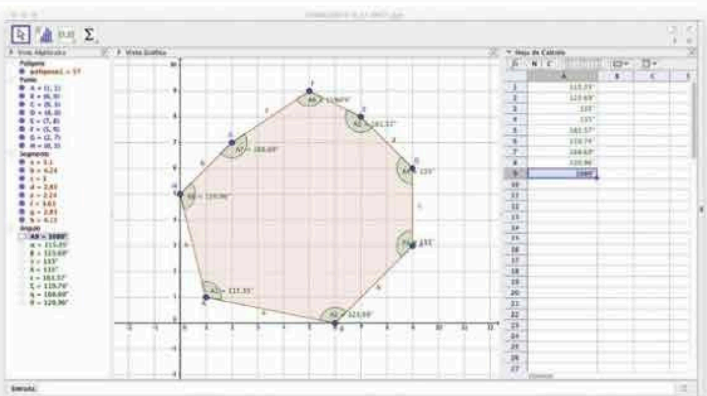
Conoce más

En la siguiente dirección electrónica encontrarás un programa gratuito de geometría, álgebra y cálculo: http://www.edutics.mx/4hC (Consulta: 20 de junio de 2018).

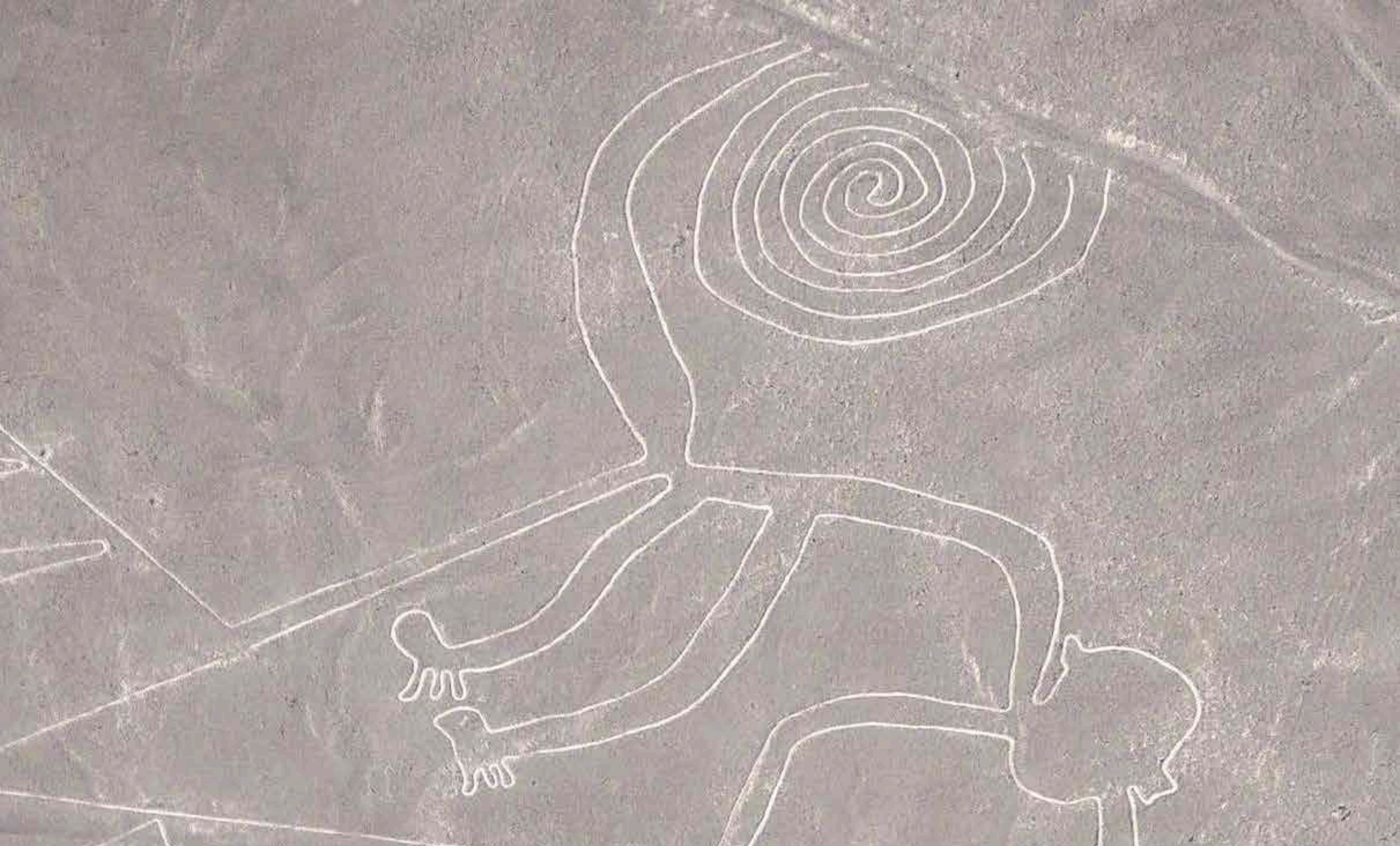
1. Abre el programa. En el menú principal, hasta arriba, selecciona *Vista* y verifica que esté marcada la opción *Vista gráfica*.
2. Selecciona la opción *Polígono* en los iconos bajo el menú principal y traza uno que sea convexo, marcando cada punto en el área de dibujo hasta regresar al primero.
3. Mide los ángulos interiores del polígono. Selecciona el icono *Ángulo* y primero haz clic en un extremo del ángulo, luego en su vértice y por último en el otro extremo, siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.
4. En el menú principal selecciona la opción *Vista* y luego *Hoja de cálculo*.
5. En las primeras celdas copia las medidas de los ángulos; para ello, haz doble clic en uno, copia la información que aparece en el recuadro, haz doble clic en la celda de la hoja de cálculo donde la colocarás y pégala. Haz lo mismo para cada ángulo del polígono.



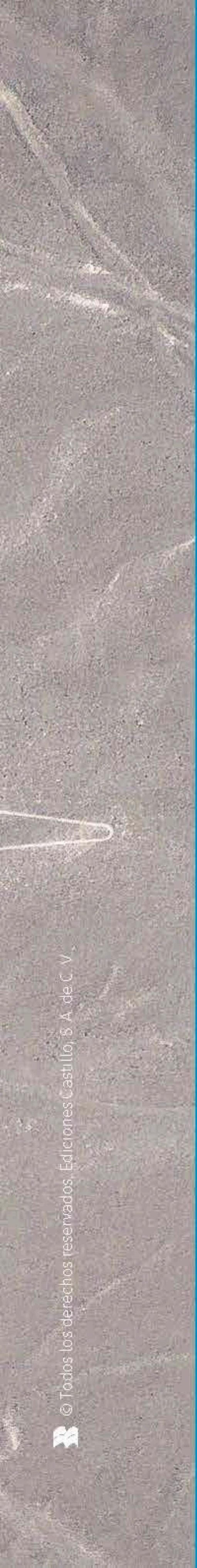
6. Selecciona las celdas con los datos de las medidas de los ángulos y haz clic en el icono *Suma*. ¿Qué valor obtienes?
7. Selecciona el icono *Elige y Mueve*, luego cambia la posición de los vértices del polígono. Observa la medida de los ángulos y el resultado de la suma. ¿Qué sucede? Justifica el resultado.



8. En equipo, utilicen la misma aplicación y propongan una actividad para mostrar la medida de los ángulos interiores de un polígono regular. Comparen sus procedimientos con sus compañeros de grupo. También analicen qué sucede con respecto a otros tipos de polígonos.
9. Si no tienen acceso a la aplicación, tracen en su cuaderno un polígono cualquiera, midan y sumen sus ángulos interiores. Comparen sus resultados. ¿Qué observan? Anoten sus conclusiones en su cuaderno



¿Sabes qué son los geoglifos? Es un tipo de arte rupestre en el cual se trazan marcas en espacios amplios sobre la superficie del suelo para crear grandes imágenes en terrenos llanos (sólo visibles desde el cielo). Este arte se caracteriza por sus grandes dimensiones (área y perímetro); pueden medir desde 3 hasta más de 100 metros de largo. Un lugar famoso por la concentración de estas figuras es el desierto de Nazca, en Perú, donde se pueden observar diversas formas geométricas o incluso animales y plantas, ¿crees que podría caber una de estas figuras en el patio de tu escuela?



U2

Secuencia 10. Proporcionalidad directa e inversa

Lección 1. Proporcionalidad directa e inversa

Lección 2. Problemas de proporcionalidad directa e inversa

Secuencia 11. Reparto proporcional

Lección 1. Situaciones de reparto proporcional

Secuencia 12. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Lección 1. Ecuaciones lineales

Lección 2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Secuencia 13. Métodos algebraicos de solución de sistemas de ecuaciones

Lección 1. Soluciones de sistemas de ecuaciones

Lección 2. Problemas de sistemas de ecuaciones lineales

Secuencia 14. Variación lineal y proporcionalidad inversa

Lección 1. Situaciones de variación lineal

Lección 2. Representaciones de proporcionalidad inversa

Secuencia 15. Modelos de variación lineal y proporcionalidad inversa

Lección 1. Modelos de variación lineal y proporcionalidad inversa

Secuencia 16. Perímetro y área de polígonos regulares

Lección 1. Perímetro y área de polígonos

Secuencia 17. Área del círculo

Lección 1. Deducción de la fórmula del área del círculo.

Secuencia 18. Medidas de tendencia central, rango y desviación media

Lección 1. Medidas de tendencia central

Lección 2. Rango y dispersión de datos

Lección 3. Desviación media

El Mono, pampas de Jumana, desierto de Nazca, Perú. Tiene un tamaño aproximado de 135 m y se cree que es la representación de la Osa Mayor.

Me preparo

Proporcionalidad directa e inversa, y reparto proporcional

1. Sofía tendrá una fiesta y quiere preparar agua de limón. En cada jarra exprimirá el jugo de seis limones.

a) ¿Cuántos limones usará para hacer siete jarras de limón? ____________

b) Si ha comprado 40 limones, ¿cuántas jarras podrá preparar? ____________

c) Si decide aumentar la concentración de jugo a ocho limones por jarra, ¿cuántas podrá preparar con los mismos 40 limones? ____________

2. La tabla que se muestra contiene datos de la venta de limón, según el Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados. Los productores de limón lo venden al mayoreo y en mayo de 2018 reportan dicha venta, dependiendo del destino y del origen del productor.

Destino	Origen	Presentación	Precio ($)	Precio por kg
Baja California	Michoacán	Arpilla de 19 kg	330.00	
CDMX	Michoacán	Arpilla de 19 kg	90.00	
Durango	Colima	Arpilla de 15 kg	150.00	
Sonora	Michoacán	Caja de 20 kg	360.00	
Tamaulipas	Puebla	Arpilla de 19 kg	284.00	

(Fuente: http://www.economia-sniim.gob.mx/2010prueba/PreciosHoy.asp?prodC=9046)

Glosario G

Arpilla. Costal hecho a base de plástico en forma de red para transportar frutas y verduras. Su costura permite una mayor transpiración de los productos.

a) Completa la tabla calculando el precio por kilogramo en cada ruta.

b) ¿En qué ruta se vende el limón por kilogramo más barato? ____________

____

c) Si un comerciante de Tijuana, B.C., quiere comprar tonelada y media de limón proveniente de Michoacán, ¿cuánto tiene que pagar? ____________

d) Unos ejidatarios de Colima venden su cosecha de limones en la Central de Abastos de Durango. Para cosechar las ocho toneladas que se vendieron, trabajaron cuatro ejidatarios: Armando y Beto, que cosecharon cada uno dos toneladas; Carlos, que cosechó una tonelada; y Daniel, el resto.

- ¿Cuánto dinero recibirán en total los ejidatarios por la venta de sus limones? ____________
- ¿Cuánto obtendrá cada uno si deciden dividirse las ganancias en partes iguales? ____________
- Reflexiona si estarán todos de acuerdo en esta forma de repartirse el dinero y por qué. ____________

____

Representación tabular, algebraica y gráfica de proporcionalidad inversa

e) El camión que transporta los limones recorre 760 km, que es la distancia del ejido del que provienen a la Central de Abastos de Durango. Registra a qué velocidad promedio deben viajar de acuerdo con el tiempo estimado que piensan invertir.

- 10 h. ________
- 8 h. ________
- 5 h. ________

3. Marca la solución de cada ecuación.

Formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

a) $3x-4=5$

- 2
- 3
- 4
- 5

b) $6-2x=4$

- 4
- 3
- 2
- 1

c) $4x-1=5$

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{2}$
- 1
- 2

d) $2.1-4.2x=0$

- 0
- 0.5
- 1.5
- 1

4. Indica si las parejas de ecuaciones son equivalentes y por qué.

a) $2x-1=x+2$, $x+1=2$. ______

b) $4-x=1$, $2x=-6$. ______

c) $3x-4=x+2$, $-x+1=-2$. ______

d) $1.5-2x=1.5$, $-2x=-1$. ______

5. Las edades de Sofía y Pablo suman 10 años, Sofía tiene 3 años más que Pablo.

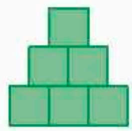
a) ¿Qué edad tiene cada uno? ______

b) Escribe las ecuaciones que resultan del planteamiento de este problema.

______

Perímetro y área de polígonos regulares y del círculo

6. Calcula el área de la figura si cada cuadrado tiene 3.4 cm^2 de superficie. ______



7. En la figura, cada triángulo tiene 2 cm de base y 1.71 cm de altura.

a) ¿Cuál es el área de la parte sombreada? ______

b) Calcula la superficie total del hexágono. ______

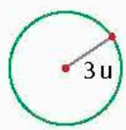
8. Analiza la figura.

a) Calcula la longitud de la circunferencia. ______

b) ¿Cuánto vale el área del círculo? ______

c) Escribe las propiedades de un círculo. ______

______



Medidas de tendencia central, rango y desviación media de un conjunto de datos

9. En un grupo de danza, las faltas a los ensayos de sus integrantes son las siguientes: 2, 0, 1, 3, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 3, 2, 0.

a) Calcula las siguientes medidas.

- Moda: ______
- Mediana: ______
- Media aritmética: ______
- Rango: ______

b) Calcula las diferencias de cada dato a la media aritmética y escríbelas: ______

______

- ¿Cuál es el promedio de estas diferencias? ______

S10 Proporcionalidad directa e inversa

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

L1 Proporcionalidad directa e inversa

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
Nicolás ha construido una maqueta de su casa para un proyecto escolar sobre energía sustentable. El ancho de su cama es de 80 cm y en la maqueta se trazó de 2 cm.
   a) Si el largo de la cama es de 2 metros, ¿de cuántos centímetros aparece en la maqueta?
   b) Las dimensiones de la casa son: 5.3 m de ancho, 8.5 de largo y 4.7 m de altura. ¿Qué medidas tiene cada dimensión en la maqueta?

   c) ¿Qué tipo de relación proporcional se da entre las dimensiones de la maqueta y las de la casa? Explica.
   d) ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad para esta relación? Describe cómo lo obtuviste.
   e) Valida las respuestas de los incisos c) y d) calculando las medidas que tendrían en la maqueta algunos muebles de tamaño real.
   f) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   g) Describe el procedimiento que realizaste para saber las respuestas.
2. Reúnanse en equipo. Razonen las características de una relación proporcional mediante la revisión de sus respuestas. Argumenten o corrijan.

Desarrollo

Proporcionalidad con tablas de variación

Para identificar las características de los tipos de relaciones, en especial las que se refieren a proporcionalidad inversa, analicemos distintas tablas de variación.

1. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para responder.
   a) La autopista 10 en Haradh, Arabia Saudita, tiene más de 200 km en línea recta. Un automóvil viaja por esta carretera con velocidad constante de 120 km/h durante 200 km.
      - Completen la tabla 2.1 que registra la velocidad del automóvil.
      - ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla? ¿Por qué?

Tabla 2.1

Distancia (km)	Tiempo (h)
50	
75	
100	
125	
150	
175	
200	

- ¿En cuántos minutos recorre 1 km? Expliquen su procedimiento. ______

______
- ¿En cuánto tiempo se recorrieron 120 km? ¿Y en cuánto tiempo se recorrerán 230 km? ______

b) Analicen los rectángulos de la figura 2.1. La tabla 2.2 muestra las medidas de los lados de cada uno. Complétenla.

Tabla 2.2

	Lado 1 (u)	Lado 2 (u)	Área (u^2)
Rectángulo 1	2	24	48
Rectángulo 2	3		
Rectángulo 3	5		
Rectángulo 4	6		

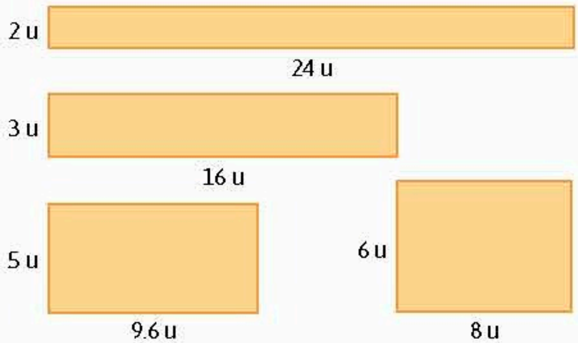


Figura 2.1. Rectángulos varios.

- ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla?

______
- Si se añade el rectángulo cuyo lado 1 mide 4 u, ¿cuál es la medida del otro lado? ¿Cuál es su área? Expliquen su procedimiento. ______

______
- ¿Cómo es el área de los rectángulos? ______

c) Rogelio aborda un taxi libre en la Ciudad de México para llegar a tiempo a una cita. El banderazo cuesta \$8.74 y se cobra una cantidad cada cierto tiempo. El viaje dura 4.5 min.

- Completen la tabla 2.3 que registra el costo del viaje por el tiempo de duración en segundos.
- ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla? ______

______
- ¿Cada cuánto tiempo se cobra? ¿Cómo lo calcularon? ______

______
- ¿Cuál es el costo que se cobra cada determinado tiempo? ¿Cómo lo saben? ______

______

Tabla 2.3

Tiempo (segundos)	Costo (pesos)
0	8.74
45	9.81
90	10.88
135	
180	
225	
270	

- ¿Cuánto cuesta un viaje de 6 min? ______
- Si el costo del viaje fue de \$19.44, ¿cuánto tiempo duró? Expliquen cómo lo obtuvieron. ______

______

d) Discutan lo siguiente acerca de las tres situaciones: ¿en cuáles se suma la misma constante a las cantidades?, ¿cuáles son proporcionales y cuáles no?, ¿en qué casos el cociente es constante y en cuáles el producto es constante?

Tabla 2.4. Gimnasio "Force Gym"	
Días que va al gimnasio	Cantidad a pagar (pesos)
1	
2	
3	
	$450.00
7	
10	
	$1 200.00
30	

Tabla 2.5. Gimnasio "Mister Gym"	
Días que va al gimnasio	Cantidad a pagar (pesos)
1	
2	
3	
	$375.00
	$525.00
10	
	$1 500.00
30	

Tabla 2.6. Gimnasio "Fit Gym"	
Días que va al gimnasio	Cantidad a pagar "repartida" en los días (pesos)
1	
2	
3	
	$240.00
	$171.42
10	
	$60.00
30	

Características de la proporcionalidad

Abordaremos distintos tipos de variación.

2. Blanca decide inscribirse en un gimnasio para mejorar su condición física. Acude a tres gimnasios para pedir informes y después tomar una decisión.

a) En el gimnasio "Force Gym" le informan que debe pagar una inscripción al inicio de $200.00 y $50.00 por cada día que vaya a ejercitarse.

- Completa la tabla 2.4. Explica tu procedimiento. ______
- ¿Cómo es la variación entre los datos de la tabla? Explica. ______
- ¿Observas alguna relación entre los datos de la tabla? ¿Cuál? ______

¿Qué representa la división de cada dato de la segunda columna con su correspondiente de la primera? ______

b) En el gimnasio "Mister Gym" le informan que no hay costo de inscripción inicial y se cobra $75.00 por día.

- Completa la tabla 2.5. Explica tu procedimiento. ______
- ¿Cómo es la variación entre los datos de la tabla? Explica. ______
- ¿Observas alguna relación entre los datos de la tabla? ¿Cuál? ______
- ¿Qué representa la división de cada dato de la segunda columna con su correspondiente de la primera? ______

c) En el gimnasio "Fit Gym" le informan de un paquete de $1 200.00 por un mes, independientemente de cuántos días acuda. Blanca piensa que puede "repartir" el costo entre los días que asista para comparar mejor.

- Completa la tabla 2.6. Explica tu procedimiento. ______
- ¿Cómo es la variación entre los datos de la tabla? Explica. ______
- ¿Observas alguna relación entre los datos de la tabla? ¿Cuál? ______
- ¿Qué representa la división de cada dato de la segunda columna con su correspondiente de la primera? ______

d) ¿Cuál de los gimnasios le conviene más? Explica. ______

e) Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados. Si hay discrepancias, contrasten y argumenten sus procedimientos. Corrijan si es necesario.

3. Analiza la situación. Responde lo que se pide.
Una compañia desarrolladora de viviendas fracciona un terreno amplio en porciones de 600 m^2 cada uno, con las dimensiones de la figura 2.2.

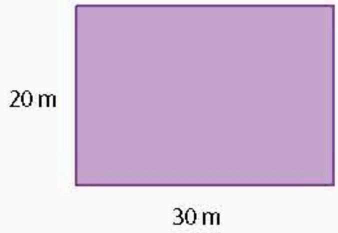


Figura 2.2. Fraccionamiento tipo.

a) Si se consideran otras dimensiones de terreno con la misma área,¿cuáles serían? Hagan una propuesta. ____________________

____

____

____

b) Comparen las dimensiones de su propuesta de terreno con las de la figura. ¿Cuál dimensión creció y cuál disminuyó? ____________________

____

c) Si una dimensión del terreno se duplica, ¿qué operación se realiza con la otra para que el área se mantenga? ____________________

d) El ingeniero de la compañía piensa que una tabla puede ser de gran ayuda para comparar los posibles terrenos. Completa la tabla 2.7. Luego discute con tus compañeros la relación entre las cantidades.

Tabla 2.7. Medidas de fraccionamiento

Largo	Ancho	Área
1		600
3	200	
6	100	
	40	
20		
60		

4. Reúnanse en equipo. Analicen las situaciones que trabajaron en la actividad 2, de la página 136, y respondan lo que se pide.

a) Escriban una situación en la que dos magnitudes varíen como en la actividad 2 a). Hagan una tabla con 10 parejas de valores.

b) Escriban una situación en la que dos magnitudes varíen como en la actividad 2 b). Hagan una tabla con 10 parejas de valores.

c) Escriban una situación en la que dos magnitudes varíen como en la actividad 2 c). Hagan una tabla con 10 parejas de valores.

d) En grupo, con la guía de su profesor, compartan las situaciones frente a grupo, luego muestren las tablas, en distinto orden que como presentaron sus situaciones, y pregunten al grupo qué tabla corresponde a cada situación.

Notación

Una situación de constante aditiva corresponde a una variación lineal, la cual se expresa de la forma $y = mx + b$. Donde b es la constante aditiva.

Dos magnitudes se encuentran en una relación de **constante aditiva** si, al multiplicar el valor de la primera por una cantidad constante y luego sumar una cantidad inicial fija se obtiene la segunda.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número. El cociente entre la segunda y la primera magnitud es constante y se denomina **constante de proporcionalidad directa**.

Dos cantidades son **inversamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número. El producto de la segunda y la primera magnitud es constante y se llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Problemas de proporcionalidad

Apliquemos lo aprendido sobre la proporcionalidad inversa para resolver diversos problemas.

5. Analiza los datos mostrados en las tablas y contesta lo que se pide.

Tabla 2.8	
Magnitud A	Magnitud B
2	1.5
4	3
6	4.5
8	6
10	7.5

Tabla 2.9	
Magnitud A	Magnitud B
2.5	5
5	8.5
7.5	12
10	15.5
12.5	19

Tabla 2.10	
Magnitud A	Magnitud B
3	360
6	180
9	120
12	90
15	72

a) ¿Qué tipo de proporcionalidad presentan las magnitudes de cada tabla? Explica cómo lo determinas.

- Tabla 2.8. ____________________
- Tabla 2.9. ____________________
- Tabla 2.10. ____________________

b) ¿Algunas tienen constante de proporcionalidad? ¿Cuáles son? ____________________

6. Escribe un ejemplo que muestre cada tipo de relación y expliquen por qué lo es.

a) Constante aditiva: ____________________

b) Proporción directa: ____________________

c) Proporción inversa: ____________________

Tabla 2.11. Distancia recorrida y gasto de gasolina	
Gasolina (L)	Distancia (km)
2	37
3	55.5
5	92.5
10	185
20	370
30	555

7. Analiza la tabla 2.11. En esta se muestra la distancia que recorre un automóvil en carretera (velocidad promedio) y los litros de gasolina consumidos.

a) ¿Qué tipo de proporcionalidad presentan las magnitudes de la tabla? Explica cómo lo determinas. ____________________

b) ¿Cuál es su constante de proporcionalidad? ____________________

c) ¿Cuántos kilómetros por litro recorre el automóvil? ____________________

d) ¿Cuántos litros gastará en un viaje de 825 km? ____________________

e) ¿Cuántos kilómetros recorrió si gastó 40 L? ____________________

8. Analiza la tabla 2.12 que muestra los datos de una cuadrilla de pintores y los días que se tardan en pintar el exterior de un edificio de 5 pisos, considerando que un día de trabajo dura 8 horas y que se trabajó al mismo ritmo.

Tabla 2.12. Número de pintores y días de trabajo	
Días de trabajo	Número de pintores
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3

a) ¿Qué tipo de proporcionalidad presentan las magnitudes de la tabla? Explica cómo lo determinas. ______

______

b) ¿Cuál es su constante de proporcionalidad? ______

c) ¿Cuántos días requeriría un trabajador para pintar el edificio? ______

d) Si 8 trabajadores pintaran el edificio, ¿cuántos días tardarían? ______

9. Una expedición turística al desierto de Sonora consta de 50 personas adultas y cuenta con víveres para 12 días. Al momento de partir, se integran 10 personas más.

a) ¿Con qué tipo de variación proporcional se puede modelar la situación? Explica por qué. ______

______

b) Completa la tabla 2.13.

c) De acuerdo con lo obtenido, ¿para cuántos días alcanzarán los víveres para las personas de la excursión si todas comen las mismas porciones? Explica.

______

Tabla 2.13		
Personas	Días que duran los víveres	Constante de proporcionalidad
50	12	
10		
25		
40		
80		

10. Determina si cada par de magnitudes presenta un tipo de proporcionalidad y cuál es.

a) El tamaño de un recipiente y la cantidad de líquido que puede contener. ______

b) La edad de una persona y su peso. ______

c) La rapidez de un automóvil y el tiempo que tarda en recorrer cierta distancia.

______

11. Organícense en equipo. Elaboren un cuadro comparativo entre una situación de proporción directa, otra de inversa y una de constante aditiva. Compartan su trabajo con el grupo y discútanlo.

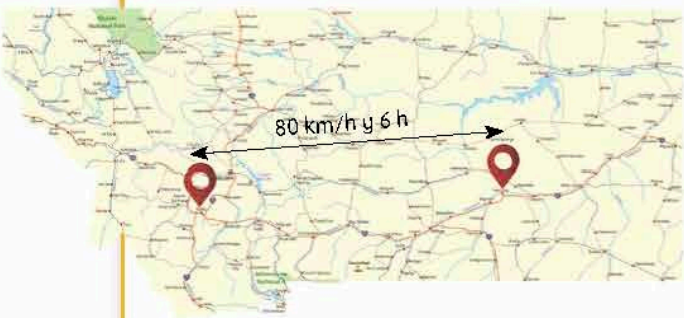
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Un automóvil recorre una distancia de 270 km a una velocidad constante de 60 km/h.
   a) ¿Qué tipo de proporción se da en la relación velocidad - distancia? ¿Por qué?
   b) ¿Qué proporción se da entre la velocidad y el tiempo? Explica.

L2 Problemas de proporcionalidad directa e inversa

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
   Para recorrer la distancia entre dos ciudades, Lorena condujo su automóvil a 80 km/h e hizo el viaje en 6 horas. Ahora está planeando el regreso Considera la velocidad constante.



   a) Si decide ir a mayor velocidad que en el primer viaje, ¿cómo será el tiempo que ocupará comparado con el recorrido anterior?
   b) ¿Cuánto tiempo necesitará si decide viajar a 100 km/h?
   c) ¿Cuál información es relevante para responder el problema y cuál no?
   d) Describe el procedimiento que desarrollaste para obtener la respuesta.
2. Reúnanse en equipo. Calculen otros valores al cambiar los datos del problema. Revisen sus respuestas, argumenten o corrijan según se requiera.

Desarrollo

Constantes de proporcionalidad directa e inversa

Hemos trabajado anteriormente con situaciones de variación proporcional directa y acabamos de conocer las características de una variación proporcional inversa. Compararemos la obtención de las constantes de proporcionalidad en ambas variaciones para aplicarla en la solución de problemas.

Conoce más
Entra a la página: http://www.edutics.mx/UDv, y resuelve un cuestionario sobre el cálculo de constantes de proporcionalidad. (Consulta: 20 de junio de 2018).

1. Un almacén vende 2 kg de harina de trigo integral en \$39.80. Don José va a comprar $18\frac{1}{2}$ kg para hornear pan.
   a) ¿Qué tipo de variación proporcional es? Explica. ______
   ______
   b) Describe un procedimiento para conocer el precio por kilogramo de harina. ______
   ______
   c) Completa la tabla 2.14.

Tabla 2.14

Harina (kg)	Costo (\$)	Obtención de constante de proporcionalidad	Valor de constante de proporcionalidad
1			
2	39.80	39.80 ÷ 2	
5			
	149.25		
	199.00		
	223.87		
$13\frac{2}{3}$			
20			

d) ¿Cuánto pagará Don José por la harina que lleva? Explica tu procedimiento. ______

______

2. Seis albañiles construyen una casa en 90 días. ¿Cuántos días tardarán nueve albañiles, trabajando al mismo ritmo, en construir una casa del mismo tamaño?

a) ¿Qué tipo de variación proporcional es? Argumenta tu respuesta. ______

______

b) Describe un procedimiento para obtener la constante de proporcionalidad del problema. ______

______

c) ¿Qué dato de la situación piensas que obtienes al calcular la constante? Explica.

______

d) Completa la tabla 2.15.

Tabla 2.15

Albañiles	Días de trabajo	Obtención de constante de proporcionalidad	Valor de constante de proporcionalidad
1			
2			
	108		
6	90	6×90	540
	$67\frac{2}{3}$		
15			

e) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta inicial? ______

3. Haz lo que se pide de acuerdo con los resultados obtenidos.

a) Describe un procedimiento para obtener la constante de proporcionalidad directa de una variación. ______

______

b) ¿De qué manera obtienes la constante de proporcionalidad en una situación de variación inversa? ______

______

c) Organizados en equipos, utilicen cálculos y argumentaciones para determinar cuáles respuestas son correctas, con el fin de determinar las constantes de proporcionalidad. Corrijan si es necesario.

En una variación proporcional **directa**, la constante de proporcionalidad se obtiene calculando el **cociente** de dos cantidades que se corresponden.

En una variación proporcional **inversa**, el **producto** de dos cantidades que se corresponden es la constante de proporcionalidad.

Portafolio P

Traza los siguientes triángulos en una hoja de papel.

a) 4, 6, 8, cm

b) 10, 15, 20 mm

c) 6, 10, 12 cm

Indica cuáles triángulos son proporcionales y escribe en la misma hoja las razones de tu elección.

Resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa

En algunas situaciones se encuentran variaciones proporcionales directas e inversas relacionadas. Continuaremos trabajando con problemas que las incluyan, determinando qué tipo de variación se presenta y resolviendo para algunos valores.

Notación

Algunas situaciones combinan varias proporciones en el mismo problema, incluso de diferentes tipos. Se les conoce como proporciones múltiples o compuestas.

4. En un circuito de carreras de automóviles, un equipo se encuentra haciendo pruebas para determinar la eficiencia de su auto para las próximas competencias. Uno de los resultados que han obtenido es que el automóvil completa una vuelta al circuito en 3 minutos, si viaja a una velocidad constante de 180 km/h.

a) Si se reduce la velocidad a 120 km/h y permanece constante, ¿qué sucede con el tiempo para recorrer una vuelta al circuito? ______

b) ¿Cuánto tarda el auto en dar una vuelta a esa velocidad? Desarrolla tu procedimiento. ______

______

c) ¿Qué tipo de variación se tiene entre la velocidad y el tiempo para dar una vuelta a la pista? Explica. ______

______

d) ¿A qué velocidad deberá ir el automóvil si se busca que el tiempo para dar la vuelta a la pista sea de 2 minutos? Explica. ______

______

5. A partir de esta situación, completa la tabla 2.16.

Tabla 2.16

Velocidad (km/h)	Tiempo (min)	Tiempo (h)	Constante de proporcionalidad
60			
	4.5		
180	3	$3 \div 60 = 0.05$	$180 \times 0.05 = 9$
240			
	1.8		
	1.5		

a) ¿Qué significado consideras que tiene la constante de proporcionalidad en esta situación?

______

______

______

b) ¿Hay una relación proporcional entre las columnas de los tiempos en minutos y los tiempos en horas? Explica por qué. ______

______

______

c) En caso afirmativo, ¿de qué tipo sería la variación? Argumenta tu respuesta. ______

______

d) ¿Cuál sería la constante de proporcionalidad de las columnas de los tiempos en minutos y en horas? Describe cómo la calculaste. ______

______

Infomáticas

En el papiro de Rhind, que data del año 1650 a.n.e., aparece ya un problema de proporcionalidad, que dice: Si 10 hekat (aprox. 48 L) de grasa deben durar un año, ¿cuánto se puede usar a diario?

6. Analiza y resuelve las situaciones presentadas.

a) Un vehículo ha tardado 6 horas para realizar un viaje a una velocidad de 120 km/h. ¿Que tipo de variación representa a la situación? ¿Cuál es su constante de proporcionalidad? ______

- ¿En cuántas horas efectuará el viaje el vehículo si lo hace a 90 km/h? ________
- ¿Cuánto tardará en efectuar el viaje a 80 km/h? ________

b) Un fabricante envasa cierta cantidad de latas. Si las coloca en cajas de tal manera que haya 50 latas por caja, se necesitan 72 cajas. ¿Qué tipo de proporción es? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ________

- ¿Cuántas cajas necesita si coloca 150 latas por caja? ________
- ¿Cuántas latas tiene el fabricante? ________
- Si quiere usar solo tres cajas, ¿cuántas latas van en cada una? ________

c) Un carpintero fabrica sillas, las cuales le cuestan $250.00 elaborar cada una. Además, tiene costos fijos por la renta del local y equipo que es de $3 500.00 al mes. ¿Cuántas sillas hacen que el precio por producirlas sea igual a los costos fijos? ________

d) En la figura 2.3 mide la altura de la persona y el árbol, y escríbelas. Si la estatura de la persona es de 170 cm, ¿cuántos metros mide el árbol? ________

e) Reunidos en equipos, razonen sobre la identificación de proporciones directas e inversas. Verifiquen sus respuestas, corrijan si es necesario.

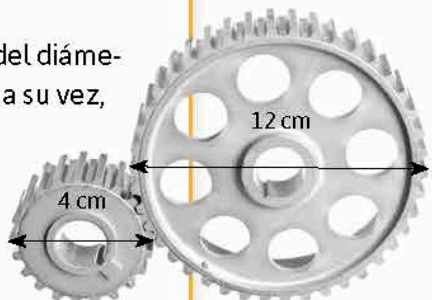
Conoce más

Para trabajar ejercicios de proporcionalidad directa e inversa, visita la página: http://www.edutics.mx/3FZ. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Figura 2.3

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En la figura se muestran dos engranes acoplados con la medida del diámetro de cada uno. El engrane menor gira 210 veces por minuto y, a su vez, hace girar al engrane mayor.
   a) ¿Qué tipo de variación se da entre las vueltas de los engranes y sus diámetros? Explica por qué.
   b) ¿Cuántas vueltas da el engrane mayor en cada minuto? Describe tu procedimiento.



Piensa y sé crítico

Imagina que eres un contratista y que empleas a 12 obreros para que construyan una obra en 16 días, pagándoles $200 diarios a cada uno.

a) ¿Cuánto gastas en sueldos de los 12 obreros por los 16 días?

b) Si quisieras terminar la obra en 8 días, ¿cuántos obreros más necesitarías, si trabajan al mismo ritmo? ¿Cuánto pagarías en sueldos? ¿Qué te conviene más? Discute con tus compañeros al respecto.

S11 Reparto proporcional

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

L1 Situaciones de reparto proporcional

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
   Cuatro amigos se asociaron para establecer una panadería. Alfonso y Xóchitl invirtieron $120 000.00 cada uno, Pablo cooperó con $80 000.00 y Sofía lo que faltaba para juntar medio millón de pesos. Después de un año, las ganancias netas del negocio han llegado a un millón de pesos, los cuales se repartirán entre los cuatro socios.

   a) Pablo sugiere que las ganancias se dividan en partes iguales. ¿Cuánto recibirá cada socio?
   b) Escribe las ventajas y desventajas de este reparto.
   c) Sofía menciona que el reparto se haga en partes que sean proporcionales a lo que invirtió cada socio. ¿Cuánto recibirá cada uno?
   d) ¿Cuál tipo de reparto consideras más justo? Argumenta tu respuesta.
   e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   f) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Características de un reparto proporcional

Con lo que hemos aprendido sobre las proporciones directas e inversas, ahora trabajaremos en dividir cantidades de tal manera que se usen estas variaciones.

1. Hay una oferta en la que se vende un lote de 126 canicas de colección a un precio de 689 pesos. Pedro y Juan lo quieren comprar pero ninguno tiene suficiente dinero, así que Pedro le propone a Juan comprar el lote entre los dos y luego repartirse las canicas. Pedro coopera con $449 y Juan completa el resto.
   a) ¿Qué parte del total del precio puso Pedro? ______
   b) Si se considera que el reparto se haga de la misma manera, ¿qué parte del total de las canicas le corresponden a Pedro? ______
   c) ¿Cuántas canicas le corresponden a Pedro y cuántas a Juan? ______
   d) ¿Piensas que este reparto ha sido justo? ¿Por qué? ______
   e) ¿En qué sentido el reparto fue proporcional? ______
   ______
   f) ¿En qué tipo de proporción se basa esta manera de repartir? Explica. ______
   ______

2. Reúnanse en equipo y determinen la estrategia y procedimientos para responder. Para el Sorteo Gordo de Navidad de la Lotería Nacional, el cual repartirá un premio de $397 952 000.00, tres amigos cooperan para comprar una serie completa de billetes de lotería (20 cachitos) que cuesta $2 000.00, pues ninguno tiene esa cantidad de dinero. Antonio pone $520.00, Beatriz coopera con $680.00 y Carlos con $800.00. Los tres amigos siguen la plática acerca de lo qué harán al ganarse el premio.

a) Carlos propone dividir el premio entre tres. Sin embargo, los otros dos amigos protestan diciendo que eso no es justo. ¿Cuánto dinero le tocaría a cada uno? Expliquen si es justo o no. ______________________________

____

b) Beatriz propone que cada quien tome el número de billetes de lotería que representa el dinero que invirtió y que cada quien cobre su premio.

- ¿Este reparto es proporcional? ¿Por qué? Usen trocitos de papel para comprobarlo. ______________________________
- Completen la tabla 2.17 para calcular el reparto de billetes de lotería.

Tabla 2.17. Reparto de billetes de lotería

Persona	Cantidad que puso para el boleto	Operación para el reparto	Cantidad de billetes de lotería
Antonio		$\frac{20}{2\,000} \times 520$	
Beatriz			
Carlos			
Total			

- ¿Se puede repartir de esta manera? ¿Por qué? ______________________________

____

c) Antonio propone repartir el dinero del premio de manera proporcional a lo que cada uno invirtió. Completen la tabla 2.18 para calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada amigo.

Tabla 2.18. Reparto de dinero del premio

Persona	Cantidad que puso para el boleto	Operación para el reparto	Cantidad de dinero
Antonio		$\frac{397\,952\,000}{2\,000} \times 520$	
Beatriz			
Carlos			
Total			

d) ¿Este reparto es proporcional? ¿Por qué? ______________________________

____

Infomáticas

La Lotería Nacional de México se fundó por mandato real de Carlos III de España en 1770, siendo la más antigua de Latinoamérica. Fuente: http://edutics.mx/wXU. (Consulta: 20 de septiembre de 2018)).

e) ¿Consideran justo este reparto? Expliquen. ______________________

____

Infomáticas I

En las colonias españolas había repartos muy particulares.
El Quinto Real indicaba que de la extracción de metales preciosos como el oro y la plata se debía apartar la quinta parte para la Corona. Además, había que apartar el diezmo, que era la décima parte de la producción, la cual se pagaba a la Iglesia.

f) ¿Cómo se relaciona este reparto con una situación de proporcionalidad?

____

____

g) ¿Hay una constante de proporcionalidad? Si es así, ¿cuál es? ______________

____

h) Propongan un procedimiento para hacer un reparto de manera proporcional. ____

____

____

i) En grupo, con la guía de su profesor, planteen situaciones en las que un reparto proporcional resuelve satisfactoriamente un problema.

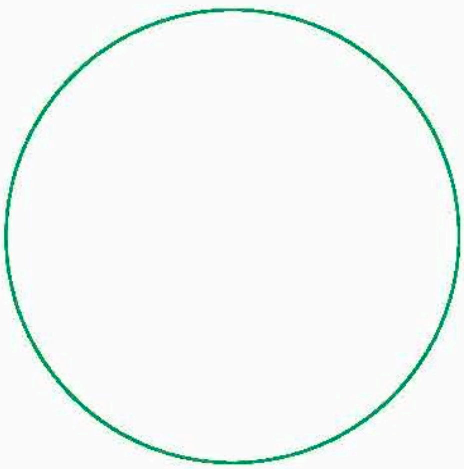
3. Reúnanse en parejas, acuerden la estrategia y los procedimientos para responder. David elabora una gráfica circular en la que representará a los miembros de su comunidad escolar, la cual consiste en 2 000 alumnos, 80 profesores, 60 miembros del personal administrativo y 60 auxiliares. Así, tendrá que repartir 360°, que corresponden al total de personas de la comunidad escolar, entre los diversos grupos de la misma.

a) Completen la tabla 2.19 para calcular cuántos grados tendrá cada sector circular.

Tabla 2.19. Reparto proporcional de grados

Grupo	Número de personas	Operación para la división del círculo	Grados para representar cada grupo
Alumnos			
Profesores			
Administrativos			
Auxiliares			
Total			

b) Tracen la gráfica en la figura con base en los resultados que obtuvieron.



4. Cuatro empleados trabajan por horas. Cada uno ha laborado 20, 40, 15 y 25 horas respectivamente. El pago por sus servicios será de $27 000, repartido entre todos.

a) ¿Consideras que será justo pagar lo mismo a cada empleado? Explica por qué: ____

____

____

b) Describe el procedimiento para efectuar el reparto del dinero a cada empleado de acuerdo con las horas trabajadas por cada uno: ______________

____

____

c) Completa la tabla 2.20 para calcular el pago de cada empleado.

Tabla 2.20. Pago a empleados

Empleado	Horas trabajadas por empleado	Operación para la división del dinero	Pago a cada empleado
1			
2			
3			
4			
Total			

d) ¿Qué diferencia hay entre estas operaciones con las realizadas en las actividades anteriores? ______________

____

e) Organícense en equipos. Razonen sobre la validez de sus resultados y la aplicación de los procedimientos. Argumenten o corrijan si es necesario.

Resolver un problema de **reparto proporcional** consiste en dividir una cantidad en partes que guarden entre sí ciertas razones. Para realizar el reparto, se encuentran los valores faltantes en una relación proporcional directa.

Reparto proporcional inverso

De manera adicional, en algunos casos se reparten las cantidades de tal manera que al menor le toque la mayor parte y viceversa.

5. Reúnanse en parejas y convengan la estrategia y procedimientos para responder.

a) Un padre de familia tiene 3 hijos: Lucía, de 8 años; Julio, de 12, y Liliana, de 5 años. Repartirá entre ellos $2 000.00 que ha ahorrado, de manera proporcional a sus edades, de tal manera que al hijo menor le toque la mayor parte del dinero.

Conoce más

Para una explicación y un ejemplo de un reparto proporcional directo, ve a la página: http://www.edutics.mx/3tN. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Infomáticas

En papiros del antiguo Egipto se han encontrado problemas sobre reparto proporcional. Algunos datan del año 1650 a. n. e. y tratan sobre la distribución de comida en los templos. Fuente: http://edutics.mx/wXi (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

- Si aplican los procedimientos realizados en las actividades anteriores, ¿se cumple la condición que desea el padre? Expliquen. ______

______

- Completen la tabla 2.21 para calcular cuánto recibirá cada hijo.

Tabla 2.21. Reparto de dinero a tres hijos

Hijo	Edad	Inverso multiplicativo	Común denominador	Fracción por común denominador	Operación	Cantidad que recibe cada hijo
Liliana						
Lucía						
Julio						
Total						

- ¿Se cumple de esta manera el objetivo del padre de familia? ¿Por qué? ______

______

b) Se repartirán $2 200.00 en premios a los tres primeros lugares de una carrera de automóviles, de tal manera que el primer lugar reciba la mayor parte del monto.

- ¿Qué tipo de reparto proporcional deben realizar? ¿Por qué? ______

______

- Completen la tabla 2.22 para calcular los montos.

Tabla 2.22. Premio a los primeros tres lugares

Lugar en la carrera	Inverso multiplicativo	Común denominador	Fracción por común denominador	Operación	Premio a cada lugar
1	1	6	$1 \times 6 = 6$	$\left(\frac{2\,200}{11}\right) \times 6$	1200
2					
3					

- ¿Se cumple el objetivo de la repartición de los premios? ¿Por qué? ______

______

- ¿Qué distingue a un problema de reparto proporcional inverso de uno directo?

______

- Describan un procedimiento para resolver un problema de reparto proporcional inverso. ______

______

c) Reúnanse en equipos. Discutan las diferencias en los procedimientos de repartos proporcionales directos e inversos. Verifiquen que sus resultados sean correctos.

Conoce más

Para ver una explicación y un problema de reparto proporcional inverso, ve a la página: http://www.edutics.mx/3tx. (Consulta: 20 de junio de 2018).

En un problema de **reparto proporcional inverso**, se busca convertirlo en una proporción directa. Por ello, se utiliza el inverso multiplicativo o recíproco.

Problemas de reparto proporcional

Así como con las proporciones, los problemas de reparto proporcional pueden apoyarse en expresiones fraccionarias en su planteamiento.

6. En las olimpiadas de matemáticas, las medallas de oro, plata y bronce se otorgan en la proporción 1: 2: 3 y se premia como máximo a la mitad de los concursantes.

a) Explica qué significa la proporción 1:2:3. ______________________________

____

b) Completa la tabla 2.23, considerando que la Olimpiada Mexicana considera alrededor de 192 participantes.

Tabla 2.23. Premiación de la olimpiada de matemáticas

Medallas	Reparto	Operación	Medallas entregadas
Oro	1	$\left(\frac{96}{6}\right)\times 1$	16
Plata	2		
Bronce	3		
Total			

c) Reúnanse en equipos. Conozcan otras maneras de expresar proporciones y su aplicación en los repartos. Argumenten o corrijan según sea el caso.

Portafolio P

Escribe en una hoja de papel las operaciones y resultados de la situación.

Pedro y Pablo invirtieron \$2 000.00 y \$3 000.00, respectivamente, en un negocio en el que obtuvieron una ganancia neta de \$1 000.00 ¿Cómo se debe repartir la ganancia en un reparto proporcional directo?

¿Y en uno inversamente proporcional?

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Un club de futbol repartirá \$270 000.00 a sus tres grupos de animación.
   a) Si los grupos tienen 150, 300 y 450 personas cada uno, ¿cuánto le corresponde a cada uno si el dinero se reparte proporcional al número de personas?
   b) ¿Cuánto recibirá cada persona en cada grupo?
   c) ¿Cuánto corresponde a cada grupo y a cada integrante si se decide que el reparto se haga de forma proporcional inversa?

Piensa y sé crítico

Las leyes en algunos países árabes establecen hasta la fecha que, al repartirse una herencia entre los hijos, las mujeres reciban la mitad de lo que deben recibir los varones. Si un padre de familia árabe dejara \$350 000.00 de herencia a sus hijos, los cuales aparecen en la imagen, ¿cuánto debe recibir cada uno para que se cumpla la ley? ¿Por qué?

S12 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

L1 Ecuaciones lineales

Inicio

1. Analiza la situación y responde lo que se pide.
Gabriel y Eduardo pusieron un estacionamiento como negocio. El primer día que abrieron al público, colgaron un cartel con los precios promocionales por apertura, como se muestra en la figura.
   a) Si un cliente pagó $48.00 en total, ¿cuánto corresponde a dos horas de estacionamiento? ¿Cuanto tiempo permaneció el auto en el mismo?

   b) El servicio de lavado de auto cuesta $45.00. Si otro cliente pagó $89.00 en total con lavado incluido, ¿cuánto tiempo estuvo el auto en el estacionamiento?
   c) ¿Cuáles datos son necesarios para responder al problema y cuáles no?
   d) Escribe un procedimiento para conocer las cantidades desconocidas en el problema.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan de ser necesario.

Desarrollo

Ecuaciones lineales con una incógnita

Abordaremos características de las ecuaciones lineales con una incógnita.

1. Analiza las situaciones y responde.
   a) Enrique le propone un juego a Nidia en el que le pide adivinar el número que está pensando, al cual, si se le suman 17 resulta 23. ¿Qué número pensó Enrique?
      - Identifica la incógnita y represéntala con una literal. ______________________
      - Plantea una ecuación que represente el problema. ______________________
      - ¿Qué número pensó Enrique? ______________________
      - Enrique piensa otro número y el resultado es 34. ¿Qué número pensó? ¿Por qué? ______________________
      ____
      - Cada vez que Enrique piense un número ¿cómo será el resultado? ______________________
      ____
   b) Ahora Nidia le pide a Enrique que adivine el número que está pensando. Le dice que lo multiplicó por dos tercios y obtuvo –24.
      - ¿Qué número pensó Nidia? Explica cómo lo determinas. ______________________
      ____

- Cada vez que Nidia piense un número ¿cómo será el resultado? ______

c) Finalmente, Enrique le pide a Nidia que adivine el número. Le dice que lo multiplicó por 4 y luego le restó 11 y obtuvo 39.

- ¿Qué número pensó Enrique ahora? Explica cómo lo determinas. ______
- Cada vez que Enrique piense un número ¿cómo será el resultado? ______

d) ¿Cuántas soluciones tiene cada una de las ecuaciones que planteaste? ______

e) Reúnanse en parejas. Jueguen por turnos a pensar un número, efectuar algunas operaciones diciéndoselas al compañero y darle el resultado. Luego pidan que determine el número pensado. Cada acierto vale dos puntos. Hagan una tabla de posiciones en el pizarrón. Decidan qué premios se les dará a los primeros tres lugares.

Las **ecuaciones lineales con una incógnita o variable** son aquellas donde solo aparece una variable elevada al exponente 1. La **solución** de una ecuación lineal con una incógnita es el valor que hace cierta la igualdad.

Por ejemplo, $3x + 5 = 14$ es una ecuación lineal con una incógnita porque aparece sólo una variable, x, que está elevada al exponente 1, $x^1 = x$; y su solución es $x = 3$, ya que si se sustituye dicho valor en la ecuación se hace cierta la igualdad: $3x + 5 = 3(3) + 5 = 9 + 5 = 14$.

Para obtener la solución, lo que se hace es aprovechar las propiedades de las igualdades de acuerdo con los siguientes pasos:

$3x + 5 - 5 = 14 - 5$ se suma la misma cantidad a los dos lados de la igualdad

$3x = 9$ Se efectúan las operaciones

$x = \frac{9}{3}$ Se divide entre un mismo número diferente de 0

$x = 3$ Se efectúan las operaciones

Notación

El cociente que resulta de dividir el cambio o incremento de la variable dependiente entre el cambio o incremento de la variable independiente correspondiente se llama razón de cambio.

2. Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno. Escribe en cada paso la propiedad de la igualdad que usas para resolverlas. Verifica tu resultado sustituyendo el valor que encontraste en la ecuación. Anota los resultados aquí.

a) $6x + 18 = 0$ ______ d) $10x = -\frac{1}{2}$ ______

b) $3x + 2 = 11$ ______ e) $9 - 7x + 18 = 12x - 10$ ______

c) $-25x = 75$ ______ f) $3x - 7 = 4x - 9$ ______

3. Grafica las ecuaciones en tu cuaderno. Determina la razón de cambio de cada una. Escribe tres parejas de números que sean solución.

a) $y = 6x$ ______ d) $y = 2(14 - 3x)$ ______

b) $y = 11x + 35$ ______ e) $y = \frac{1}{2}x - 1$ ______

c) $y = -3x$ ______ f) $y = x + 2(3x + 1)$

Conoce más

¿Existe una relación entre los espectáculos de magia y las matemáticas? Lee al respecto en la página http://www.edutics.mx/Uzk. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Trabajaremos con los conceptos acerca de relaciones funcionales y variación lineal.

4. En un espectáculo, el mago Isaac, el magnífico, pidió a una persona del público que pensara en un número, luego que lo multiplicara por 100; así mismo que al resultado le sumara el año en curso y, finalmente, que restara el año del nacimiento de la persona. El mago preguntó el resultado y la persona le contestó 3 246, a lo cual el mago replicó: "el número que usted pensó es el 32 y tiene 46 años". La persona asintió y el auditorio aplaudió.

a) ¿Cuántas incógnitas identificas en la situación? Asigna literales.

____

Tabla 2.24	
Lenguaje normal	**Lenguaje algebraico**
Piensa un número	
Multiplícalo por 100	
Suma el año en curso	
Resta el año de tu nacimiento	
Resultado obtenido	

b) Para saber lo que hizo el mago, completa la tabla 2.24. Describe el procedimiento. _______________

c) Escribe la ecuación que permite al mago saber la respuesta en el caso de tu edad _______________

d) ¿Qué tipo de relación tienen las variables? _______________

e) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación que planteaste? ¿Cómo determinas cada una? _______________

f) Escribe tres soluciones de la ecuación que obtuviste. _______________

g) Aplica el procedimiento del mago con algunos de tus compañeros. Valida tu resultados con una calculadora. Los últimos dos dígitos del resultado corresponden con la edad y los primeros con el número elegido. _______________

h) Reúnanse en equipo e inventen una secuencia de operaciones que les permita adivinar el número que pensó una persona, luego pónganlo en práctica con algún otro equipo.

Notación

Las expresiones algebraicas de la forma $y = ax$ asociadas a una situación de variación proporcional se pueden representar con líneas rectas que pasan por el origen, esto es, el punto (0, 0). Al valor de la letra a se le llama pendiente de la recta. Entre mayor sea la pendiente de una recta, su ángulo de inclinación respecto al eje x será mayor y viceversa.

Las **ecuaciones lineales con dos incógnitas o variables** son aquellas donde sólo aparecen dos variables, cada una elevada al exponente 1. Una **solución de una ecuación lineal con dos incógnitas** es la pareja de valores (x, y) que hace cierta la igualdad. Por ejemplo, $y = 6x + 5$ es una ecuación lineal con dos incógnitas porque aparecen sólo dos variables, x e y, y ambas están elevadas al exponente 1, recordemos que $x^1 = x$ y que $y^1 = y$. La solución de esta ecuación son todas las parejas de números (x, y) que se forman dando un valor a una de las variables para calcular el valor de la otra: (0, 5) y (1, 11) son dos de las infinitas parejas que hacen cierta la igualdad.

Ecuaciones lineales con dos incógnitas y rectas

Un aspecto fundamental es la relación de variación lineal y su representación gráfica en el plano cartesiano para definir una ecuación lineal con dos incógnitas.

5. Reúnanse en parejas. Acuerden el procedimiento y los procedimientos para responder. Consideren las ecuaciones $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 1 - \frac{3}{4}x$.

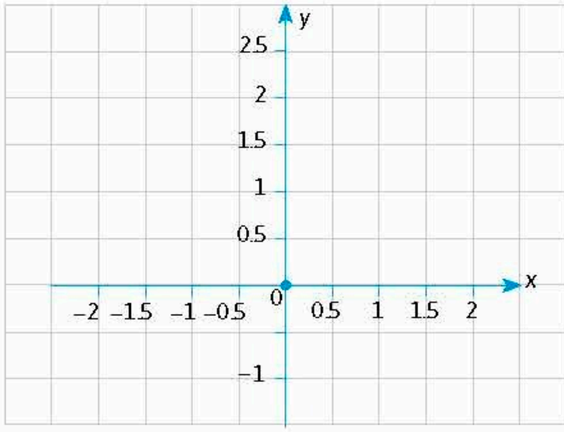
a) ¿Cuáles son las incógnitas en la primera ecuación? ¿Y en la segunda? ____________________

____

b) Completa la tabla 2.25 y grafica las ecuaciones.

Tabla 2.25

x	$y = \frac{1}{2}x$	$y = 1 - \frac{3}{4}x$
−2		
−1.5		
−1		
−0.5		
0		
0.5		
1		
1.5		
2		



c) ¿Cuál ecuación representa una variación proporcional? ¿Por qué? ____________________

____

d) ¿Cuál ecuación representa una variación lineal? ¿Por qué? ____________________

____

e) ¿Qué tipo de ecuaciones son? Expliquen. ____________________

____

f) Escribe tres parejas de números que sean solución de cada una de las dos ecuaciones. Encuentra una pareja de números que sea simultáneamente solución a ambas ecuaciones. Localízala en la gráfica. ¿Qué observas? ____________________

____

g) Reúnanse en equipo. Expresen sus resultados y verifiquen su validez, así como las características de las gráficas. Argumenten y corrijan si es necesario. Escriban una conclusión. ____________________

____

____

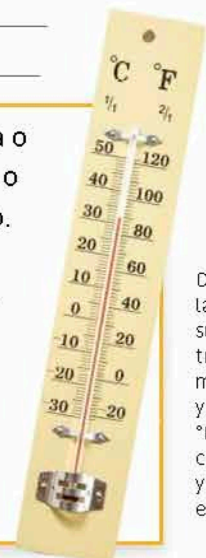
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Dos unidades de temperatura son los grados Celsius (°C) y los Farenheit (°F). La expresión algebraica que permite convertir de la primera a la segunda escala es $°F = \frac{9}{5}°C + 32$.

a) Si la temperatura es de 20 °C, ¿a cuántos °F equivalen?

b) En tu cuaderno traza la gráfica que relaciona ambas escalas de temperatura.

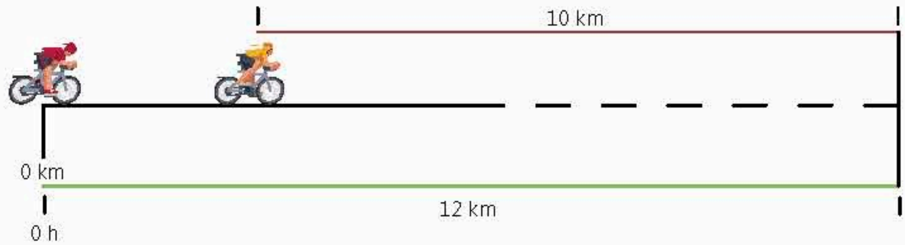


Daniel Farenheit creó la escala que lleva su apellido fijando tres puntos: el de una mezcla de agua, hielo y cloruro de amonio (0 °F), el de una mezcla con hielo y agua (32 °F) y el de la sangre de su esposa (96 °F).

L2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Inicio

1. Analiza la situación. Luego responde lo que se pide.
   Marco y Federico participan en una carrera de ciclismo. Marco está a 10 km de la meta y se desplaza a 32km/h, y Federico se encuentra a 12 km de la meta y avanza con una rapidez de 40 km/h.



   a) A partir de este punto, si ambos mantienen su rapidez, ¿alcanzará Federico a Marco?
   b) En caso afirmativo, ¿cuánto tardará y a qué distancia de la meta ocurrirá esto?
   c) ¿Quién ganará la carrera?
   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.
2. Reúnanse en equipo. Interpreten con variables las cantidades de la situación con el fin de revisar sus modelos, procedimientos y resultados.

Desarrollo

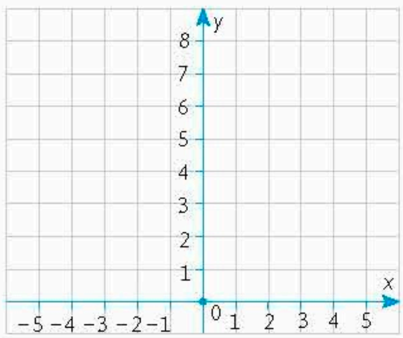
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y número de soluciones

Comenzaremos por identificar algunas de las características y determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Para esto nos apoyaremos de las gráficas de ecuaciones lineales.

1. Reúnanse en equipo y hagan lo que se pide.
   a) Consideren las ecuaciones: $y = x + 4$, $y = 4 - x$.
   - ¿Qué tipo de ecuaciones son? ____________________
   - Completen la tabla 2.26 y grafiquen ambas ecuaciones.

Tabla 2.26

x	$y = x + 4$	$y = 4 - x$
−4		
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		
4		



- Escriban las dos ecuaciones juntas, una debajo de otra, en el espacio correspondiente.

Ecuaciones: $\begin{cases} \text{Primera ecuación } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \text{Segunda ecuación } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

- Consideren sólo la primera ecuación. Den algunos otros valores que puede tomar la variable *y*. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ________________
- Consideren sólo la segunda ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene? __________
- Si *x* es igual a 3, ¿cuál es el valor de *y* en cada una de las ecuaciones?

  Primera ecuación ______________ Segunda ecuación ______________
- Escribe las parejas que se obtienen de cada ecuación: ____________________
- ¿Las ecuaciones tienen la misma solución para este caso? Expliquen. _______

  ____
- Consideren las dos ecuaciones simultáneamente. ¿Qué puntos comparten ambas rectas? ¿Qué creen que signifique esto? ¿Cuántas soluciones tienen, es decir, cuántas parejas (*x*, *y*) son solución de las dos ecuaciones a la vez? ______________________________

  ____

  ____

  ____

  ____
- Consideren las dos ecuaciones simultáneamente. ¿Cómo son los valores de la variable *x* en ambas ecuaciones? ¿Y los de la variable *y*? ______________________________
- ¿Qué relación observan entre las representaciones gráficas de las ecuaciones y las soluciones de ambas? ____________

  ____

  ____
- Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Verifiquen su validez mediante argumentaciones o hagan las correcciones necesarias.

b) Consideren las ecuaciones $v = 4 + u$, y $v = 2\left(2 + \frac{1}{2}u\right)$.

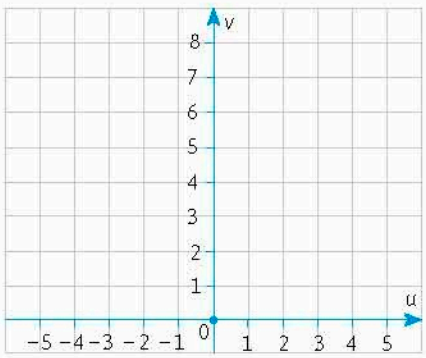
- ¿Qué tipo de ecuaciones son? ______________________________

  ____
- ¿Con qué literales se representan las incógnitas en la primera ecuación? ¿Y en la segunda? ____________________

  ____
- Completen la tabla 2.27 y grafiquen ambas ecuaciones.

Tabla 2.27

u	$v = 4 + u$	$v = -2\left(2 + \frac{1}{2}u\right)$
−4		
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		
4		



- Escriban las dos ecuaciones juntas, una debajo de otra, en el espacio correspondiente.

Ecuaciones: $\left\{ \right.$

- Consideren sólo la primera ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene? ______
- Ahora consideren sólo la segunda ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene? ______
- Consideren las dos ecuaciones simultáneamente. ¿Cuántos puntos comparten ambas ecuaciones? ¿Son los únicos o hay más? ¿Qué representa cada punto compartido en ambas rectas? ¿Cuántas soluciones tienen? ______
- Consideren las dos ecuaciones simultáneamente. ¿Cómo son los valores de la variable *u* en ambas ecuaciones? ¿Y los de la variable *v*? ______
- ¿Observan alguna relación entre las representaciones gráficas de las ecuaciones y las soluciones de las ecuaciones simultáneas? ______

c) Considera las ecuaciones $s = -t + 4$, y $s = 3\left(1 - \frac{1}{3}t\right)$.

- ¿Qué tipo de ecuaciones son? ______
- ¿Con qué literales se representan las incógnitas en la primera ecuación? ¿Y en la segunda? ______
- Completen la tabla 2.28 y grafiquen ambas ecuaciones.

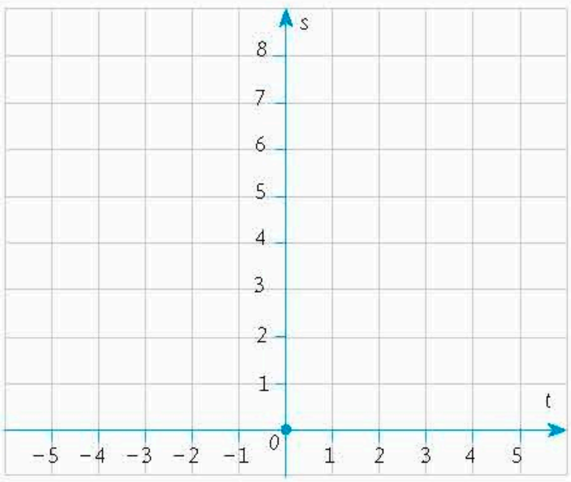


Tabla 2.28

t	$s = -t + 4$	$s = 3\left(1 - \frac{1}{3}t\right)$
–4		
–3		
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		
4		

- Escriban las dos ecuaciones juntas, una debajo de otra, en el espacio correspondiente.

Ecuaciones: $\begin{cases} \\ \end{cases}$

- Consideren sólo la primera ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene? ____________

____

- Ahora consideren sólo la segunda ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene? ________

____

- Consideren las dos ecuaciones simultáneamente. ¿Existe algún punto que compartan ambas rectas? ¿Qué significa que las rectas no tengan un punto en común? ¿Cuántas soluciones tienen? ____________
- ¿Observas alguna relación entre las representaciones gráficas de las ecuaciones y las soluciones de ambas? ____________

____

- Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Perfeccionen sus procedimientos y revisen sus resultados, corrigiendo en caso necesario.

d) En grupo, concluyan cuántas soluciones pueden tener dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Discutan acerca de cómo el trazar las gráficas es una forma de determinar soluciones simultáneamente a dos ecuaciones lineales.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, o sistema de 2×2, se puede representar algebraicamente como

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

donde los coeficientes a, b, c y d son números cualesquiera.

La **solución** de un sistema de 2×2 son todas las parejas de valores que pueden tomar las variables que hacen cierta la igualdad de las dos ecuaciones a la vez.

El **método gráfico** para la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas 2×2 consiste en graficar cada ecuación del sistema y determinar su intersección. La solución del sistema corresponde a los valores (x, y) de la intersección entre dichas rectas.

Un sistema de ecuaciones de 2×2 puede tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución dependiendo si la representación gráfica de las ecuaciones es dos rectas que se intersectan, una sola recta o dos rectas paralelas.

Sistemas de 2 × 2, rectas y soluciones

Una vez definido un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, veamos ahora la relación entre las pendientes asociadas a las ecuaciones y sus soluciones.

2. Reúnanse en equipo y hagan lo que se pide.

a) Consideren los sistemas de 2×2 de la tabla 2.29. Hagan en su cuaderno las operaciones necesarias para expresar las ecuaciones de cada sistema en la forma $y = mx + b$. Completen la tabla.

Tabla 2.29			
	Primer sistema	Segundo sistema	Tercer sistema
Sistemas de ecuaciones	$\begin{cases} y = 1.5x + 2.5 \\ y = -(x+1) \end{cases}$	$\begin{cases} y = -(x+1) \\ y = -\frac{1}{3}(3x+3) \end{cases}$	$\begin{cases} y = -x-1 \\ y = 2-x \end{cases}$
	$\{$	$\{$	$\{$
Si x = 0 entonces y es			
Si y = 0 entonces x es			

b) Completen la tabla 2.30. Consideren las dos últimas filas de la tabla 2.29. Formen parejas de números (x, y) para cada ecuación de cada sistema y grafiquen.

Tabla 2.30						
	Primer sistema		Segundo sistema		Tercer sistema	
Puntos de la primera ecuación	$(0, 2.5)$	$(-\frac{5}{3}, 0)$				
Puntos de la segunda ecuación						

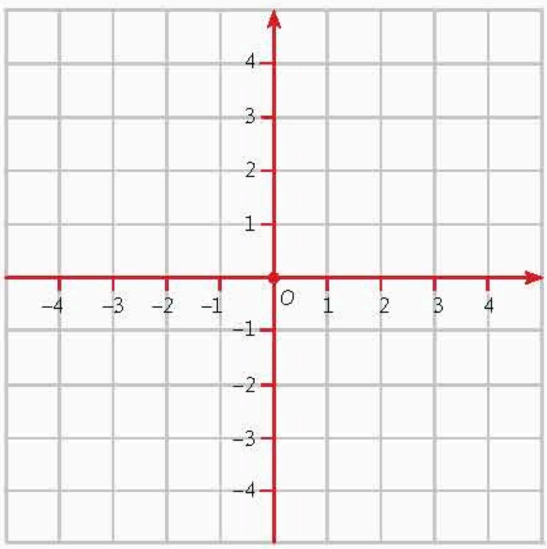
c) ¿Cuántas soluciones tiene el primer sistema? ______________________

d) ¿Cuántas soluciones tiene el segundo sistema? ______________________

____

e) ¿Cuántas soluciones tiene el tercer sistema? ______________________

____



f) Escriban una estrategia para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones usando el método gráfico. Discutan acerca de cómo son las soluciones de un sistema de ecuaciones de 2×2. ____________________

____

____

____

Problemas de cantidad de soluciones de sistema 2×2

Ahora aplicaremos lo aprendido acerca de la cantidad de soluciones de sistemas de 2×2.

3. Para cada sistema de 2×2 determina la cantidad de soluciones.

a) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -(x + 2) \\ y = x - 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = -15x \\ y = 0.67x + 1.45 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \end{cases}$

4. Reúnanse en equipo. Razonen sobre la relación entre las características de un sistema de ecuaciones y el número de soluciones. Argumenten y corrijan si es necesario.

Conoce más

En la página http://www.edutics.mx/Uzo, encontrarás actividades interactivas sobre el método gráfico de solución de un sistema de ecuaciones lineales. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de 100 cm^3 y el fabricante indica que la velocidad de caída de la arena es de 5 cm^3/s. El reloj se voltea de tal manera que la arena comienza a caer.

a) Plantea la ecuación que describe la disminución del volumen de arena en la parte superior del reloj conforme pasa el tiempo.

b) Plantea la ecuación que describe el aumento del volumen que ocupa la arena en la parte inferior del reloj al paso del tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo tarda en que haya la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj?

d) Determina cómo encontrar y expresar la solución del problema.

Piensa y sé crítico

Humberto no ha tenido tiempo para comprar un regalo de cumpleaños para su amiga Miriam. Así que le pide a Juan, un amigo de ambos, que lo compre. El ticket de compra que entregó Juan a Humberto sólo indicaba el precio total (regalo más envoltura) de \$1 100.00. Juan sólo comentó que el regalo costó \$1 000.000 más que la envoltura. ¿Cuál es el precio del regalo y de la envoltura?

S13 Métodos algebraicos de solución de sistemas de ecuaciones

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

L1 Soluciones de sistemas de ecuaciones

Inicio

1. Analiza la situación y responde.
Los babilonios escribieron más de 400 tablillas de arcilla referentes a teorías matemáticas. En una de ellas, escrita entre los años 600 y 300 a.n.e., aparece el siguiente problema:

$$\tfrac{1}{4}\text{ anchura} + \text{longitud} = 7\text{ manos}$$
$$\text{longitud} + \text{anchura} = 10\text{ manos}$$

a) ¿Cuáles son las gráficas que describen las ecuaciones? ¿Cuál es la solución del problema?
b) Si se asigna el valor de 5 a una mano, ¿cuál será la solución del problema?
c) ¿Cuáles datos son necesarios para responder al problema, y cuáles no?
d) Describe el procedimiento que usaste para resolver los problemas.

2. Reúnanse en equipo. Razonen sobre las maneras de solucionar este tipo de problemas al verificar sus resultados.

Desarrollo

Transformación de una ecuación lineal con dos incógnitas

Recordaremos propiedades de la igualdad como primer acercamiento a establecer algunos métodos algebraicos de solución de sistemas de 2×2.

Las **propiedades de la igualdad** establecen que cuando se suman, restan, multiplican o dividen ambos lados de una igualdad por una misma cantidad, se obtiene otra nueva y equivalente a la anterior. Esas propiedades son:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
2. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$
3. Si $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$
4. Si $a = b$, entonces $a \div c = b \div c$, con $c \neq 0$.

Glosario
Coeficiente. Número a la izquierda de una variable que indica cuántas veces debe multiplicarse.

1. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder en su cuaderno.
   a) Consideren la ecuación $3x + 2y = 5$.
   - ¿Cuál es el signo del **coeficiente** de la variable x?
   - Si sólo al miembro izquierdo de la ecuación le restan $3x$, ¿la igualdad se conserva? Expliquen.
   - Si en ambos lados de la ecuación restan $3x$ y simplifican, ¿se conserva la igualdad? ¿Cómo queda la ecuación? ¿Qué propiedad de la igualdad pueden usar para justificar esto?

- Consideren la ecuación $-3x + 2y = 5$. ¿Qué deben sumar o restar para obtener una ecuación similar a la anterior? ¿Qué propiedad de la igualdad puedes usar para justificar esto?

b) Consideren la ecuación que obtuvieron en el tercer punto del inciso a). ¿Cuál es el signo del coeficiente de la variable y?

- Si dividen el miembro izquierdo de la ecuación entre 2, ¿por cuál número deben dividir al miembro derecho para que la igualdad se conserve? Justifiquen su respuesta. ¿Cómo queda la ecuación?
- Observen que la ecuación original $3x + 2y = 5$ se transformó en la ecuación equivalente $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$ en donde la variable y está en función de x. Ahora consideren la ecuación $-2y = 5 - 3x$. ¿Por cuál cantidad deben dividir o multiplicar para obtener una ecuación en donde la variable y está en función de x? ¿Qué propiedad de la igualdad puedes usar para justificar esto?
- Consideren la ecuación $\frac{1}{2}y = 5 - 3x$. ¿Por cuál cantidad deben dividir o multiplicar para obtener una ecuación en donde la variable y está en función de x? ¿Qué propiedad de la igualdad puedes usar para justificar esto?
- Considera la ecuación $-\frac{1}{2}y = 5 - 3x$. ¿Por cuál cantidad debes dividir o multiplicar para obtener una ecuación en donde la variable y está en función de x? ¿Qué propiedad de la igualdad puedes usar para justificar esto?

c) Propongan un procedimiento para transformar una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$ a la forma $y = dx + e$. Escriban las propiedades de la igualdad con las que justifican su resultado.

d) ¿Se puede transformar la ecuación $ax + by = c$ a la forma $x = dy + e$? ¿Cómo? Escriban las propiedades de la igualdad con las que justifican su resultado.

e) Apliquen su propuesta de procedimiento para completar la tabla 2.31. Escriban los pasos que llevan de la ecuación a las ecuaciones transformadas. Especifiquen cuáles propiedades de la igualdad aplicaron.

Conoce más

Para más detalles sobre las propiedades de la igualdad en ecuaciones, consulta: http://www.edutics.mx/UwQ. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Tabla 2.31. Transformaciones de ecuaciones lineales

Ecuación	Transformación $y = ax + b$	Transformación $x = ay + b$
$4y + x + 1 = 0$		
$\frac{1}{2}y - x = 2$		
$\frac{1}{10}x - \frac{y}{20} = 120$		
$3y - 5x + 7 = 0$		

f) En grupo, y con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. En caso de haber discrepancias, argumenten sus procedimientos. Discutan acerca de la importancia y uso de las propiedades de la igualdad al transformar ecuaciones de la forma $ax + by = c$ en $y = ax + b$ y $x = ay + b$. Propongan ejercicios en el pizarrón para clarificar dudas.

Método de igualación para resolver un sistema de 2×2

Utilicemos las transformaciones de una ecuación en el método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para responder en su cuaderno.

Encuentren la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.

a) Escriban una ecuación que describa el perímetro del rectángulo.

b) Escriban una ecuación que describa "un lado es el triple del otro" en el rectángulo.

c) Transformen las ecuaciones a la forma $y = ax + b$ y escriban el sistema de 2×2.

d) En ambas ecuaciones aparecen las mismas literales despejadas, ¿esto quiere decir que las cantidades que toman son iguales en ambas ecuaciones? Expliquen.

e) ¿Pueden igualar las expresiones de la variable despejada? ¿Por qué?

f) En grupo, con la guía de su profesor, igualen ambas expresiones de la variable despejada. ¿Qué ecuación obtuvieron? ¿Cómo obtienen el valor de la otra variable?

Escriban su procedimiento en su cuaderno y el resultado aquí. ______

g) Por parejas, verifiquen sus resultados trazando la gráfica del sistema. Luego escriban un procedimiento para resolver un sistema de 2×2. ¿A qué punto corresponde en la gráfica el punto que encontraron en el inciso f)?

El método de **igualación** para resolver un sistema de 2×2 consiste en:

1. Transformar las ecuaciones para que en uno de los lados de la igualdad quede sólo la misma variable con coeficiente 1.
2. Igualar las expresiones que están igualadas a la variable y.
3. Resolver la ecuación con una incógnita para obtener el valor de x.
4. Sustituir el valor de x en cualquier ecuación del sistema para obtener el valor de y.
5. Comprobar la solución sustituyendo los valores determinados para x y y en el sistema de 2×2.

3. Resuelve los sistemas de ecuaciones usando el método de igualación. Transforma las ecuaciones en caso de que sea necesario y escribe los resultados en el espacio al lado de cada sistema. Comprueba las soluciones realizando las gráficas de cada sistema en tu cuaderno.

a) $\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ $x =$ ______, $y =$ ______

b) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2y - 4x = 4 \end{cases}$ $x =$ ______, $y =$ ______

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 1 \\ 2y - x = -2 \end{cases}$ $x =$ ______, $y =$ ______

4. Reúnanse en equipo. Consideren los sistemas de la actividad anterior y respondan.

a) ¿Hay sistemas en los que no existan soluciones? ¿Cuáles? ¿Cómo pueden determinarlo usando el método de igualación? ______

______

______

b) ¿Hay sistemas que tengan un número infinito de soluciones? ¿Cuáles? ¿Cómo pueden determinarlo usando el método de igualación? ______

c) En grupo, con la guía de su profesor, discutan acerca de las características y ventajas del método de igualación.

Método de sustitución para resolver un sistema de 2 × 2

Contrastemos el método anterior con el de sustitución.

5. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder en su cuaderno.

Alicia fue a una papelería de autoservicio y compró los artículos que se muestran en la figura 2.5. Al llegar a su casa, le preguntaron el precio de la pluma pero no pudo recordarlo. Sólo recordaba que gastó una vez y media lo de un cuaderno y que el total fue de $112.00.

a) Escriban una ecuación que corresponda al precio de la pluma, respecto al precio del cuaderno, y una ecuación que corresponda al pago total. Luego escriban el sistema de 2 × 2 que describe la situación.

b) ¿En cuál ecuación aparece sólo una variable de un lado de la igualdad con coeficiente 1?

c) En grupo, con la guía de su profesor, sustituyan la expresión a la que está igualada esa variable en la otra ecuación. ¿Qué ecuación resulta? ¿Cómo obtienen el valor de la otra incógnita? Escriban su procedimiento en su cuaderno y el resultado aquí. ______

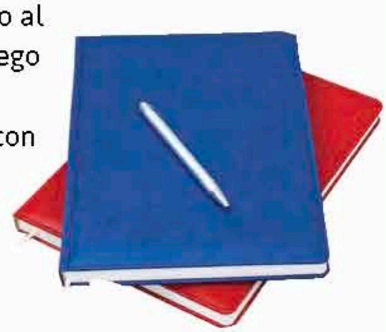


Figura 2.5

d) Por parejas, verifiquen sus resultados trazando la gráfica del sistema. Luego escriban un procedimiento para resolver un sistema de 2 × 2.

e) En grupo, con la guía de su profesor, escriban una conclusión acerca de esta forma de resolver un sistema de 2 × 2.

El método de **sustitución** para resolver un sistema de 2 × 2 consiste en:

1. Transformar una de las ecuaciones para que en uno de los lados de la igualdad se obtenga una de las variables con coeficiente 1.
2. Sustituir la expresión que está igualada la variable que queda sola en un lado de la ecuación en la otra ecuación. Así se obtiene una ecuación con una sola variable.
3. Resolver la ecuación con una variable.
4. Sustituir el valor que se obtuvo en cualquier ecuación del sistema para obtener el otro valor.
5. Comprobar la solución sustituyendo los valores determinados para x y y en el sistema de 2 × 2.

6. Resuelve los sistemas de 2×2 usando el método de sustitución. Escribe los valores de las incógnitas en el espacio al lado de cada sistema. Comprueba las soluciones realizando las gráficas de cada sistema en tu cuaderno.

a) $\begin{cases} y + x = 3 \\ y = x - 2 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

c) $\begin{cases} y - x = -1 \\ y - x = 1 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

b) $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ \frac{1}{2}(2y - 4x) = 1 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

7. Reúnanse en equipo. Consideren los sistemas de la actividad anterior y respondan.

a) ¿Hay sistemas que no tienen solución? ¿Cuáles? ¿De qué manera el método de sustitución permite saberlo? ______

b) ¿Hay sistemas con un número infinito de soluciones? ¿Cuáles? ¿Cómo se determina con apoyo del método de sustitución? ______

c) En grupo, discutan acerca de las ventajas y desventajas del método de sustitución, comparando con los anteriores.

Método de suma y resta para resolver un sistema de 2×2

Ahora abordemos otro método llamado de suma y resta.

8. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder en su cuaderno.

Renata abrió su alcancía y le dijo a Raúl: "Tú tienes poco dinero ahorrado, la diferencia entre mi dinero y el tuyo es de \$490.00". Raúl contestó.: "Pero si lo juntamos son \$560.00". ¿Cuánto dinero tiene Renata y cuánto Raúl?

a) Escriban una ecuación que corresponda a la situación "la diferencia entre mi dinero y el tuyo es de \$490.00"; y otra que corresponda a "si lo juntamos son \$560.00". Luego escriban el sistema de 2×2 que describe la situación completa.

b) Encuentren un número tal que al multiplicarlo en ambos miembros de una de las ecuaciones, obtengan una ecuación equivalente que tenga igual coeficiente para una de las variables en la otra ecuación.

c) En grupo, con la guía de su profesor, verifiquen que han obtenido lo anterior. Luego, sumen o resten ambas expresiones, miembro a miembro. ¿Qué ecuación resulta? Cómo obtienen el valor de la otra incógnita? Escriban su procedimiento en su cuaderno y el resultado aquí. ______

d) Por parejas, verifiquen sus resultados trazando la gráfica del sistema. Luego escriban un procedimiento para resolver un sistema de 2×2.

e) En grupo, con la guía de su profesor, escriban una conclusión acerca de esta forma de resolver un sistema de 2×2.

El método de **suma y resta** para resolver un sistema de 2×2 consiste en:

1. Encontrar una cantidad constante tal que al multiplicarla por los miembros de una o de las dos ecuaciones se obtengan ecuaciones equivalentes que tengan igual coeficiente para una de las incógnitas.
2. Sumar o restar las ecuaciones, término a término. Así se obtiene una ecuación con una variable.
3. Resolver la ecuación con una variable.
4. Sustituir el valor que se obtuvo en cualquier ecuación del sistema para obtener el otro valor.
5. Comprobar la solución sustituyendo los valores determinados para *x* e *y* en el sistema de 2×2.

Infomáticas

El libro *El arte matemático*, de autor chino desconocido (siglo III a.n.e.), contiene algunos problemas en los que se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos ideas de métodos de solución de ecuaciones lineales con dos incógnitas, así como solución de sistemas con un número mayor de ecuaciones lineales y de incógnitas. Un problema tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

9. Resuelve los sistemas de 2×2 usando el método de suma y resta. Escribe los valores de las incógnitas en el espacio al lado de cada sistema. Comprueba las soluciones realizando las gráficas de cada sistema en tu cuaderno.

a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y - 2x = 2 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ $x =$ ______ $y =$ ______

10. Reúnanse en equipo. Consideren los sistemas de la actividad anterior y respondan.
   a) ¿Hay sistemas que no tienen solución? ¿Cuáles? ¿De qué manera el método de suma y resta permite saberlo? ______
   b) ¿Hay sistemas con un número infinito de soluciones? ¿Cuáles? ¿Cómo se determina con apoyo del método de suma y resta? ______
   c) En grupo, discutan acerca de las ventajas y desventajas del método de suma y resta comparando con los anteriores.

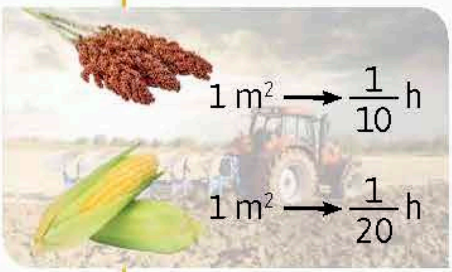
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Para una excursión se apuntaron 100 alumnos. El organizador les informó que, si juntaban 25 estudiantes más, cada uno tendría un ahorro de \$78.00.
   a) Escribe un sistema de ecuaciones para modelar esta situación.
   b) ¿Cuál era el costo original de la excursión? ¿Cuánto pagaría cada alumno si se agregan las 25 personas?
   c) ¿Qué método resultó más adecuado para resolver el problema? Explica.

L2 Problemas de sistemas de ecuaciones lineales

Inicio

1. Analiza la situación. Haz lo que se pide.



Un pequeño productor agrícola de la región de Bajío siembra **sorgo** y maíz en 2000 m^2 de terreno. Durante la época de siembra alquila una máquina para usarla 120 horas. Para plantar 1 m^2 con sorgo requiere $\frac{1}{10}$ h de uso de la máquina mientras que, para 1 m^2 con maíz se requiere $\frac{1}{20}$ h. Para aprovechar todo el terreno y el tiempo de la máquina, ¿qué área debe plantar con sorgo y qué área debe plantar con maíz?

a) Escribe dos ecuaciones: una para el área total y otra para el tiempo de uso de la máquina. Luego escribe el sistema de ecuaciones.

b) Resuelve el sistema usando el método que te parezca más adecuado.

c) ¿Cuántos m^2 se sembrarán con sorgo? ¿Cuántos con maíz?

d) ¿Cuáles datos son necesarios para responder el problema y cuáles no?

e) Describe el procedimiento que usaste para resolver la situación.

2. Reúnanse en equipo. Modelen otras situaciones que requieren el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Glosario G

Sorgo. Tipo de grano similar al maíz, utilizado para consumo animal mayormente.

Desarrollo

Uso de sistemas de ecuaciones lineales para la resolución de problemas

Apliquemos lo aprendido para resolver problemas que se modelan a través de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Conoce más +

Te recomendamos el libro *A jugar con las matemáticas*, de Lawrence Potter, en el que encontrarás diversos problemas sobre varios temas matemáticos, como el álgebra. Búscalo en tu biblioteca del aula.

1. Analiza la situación. Contesta lo que se te pide.

El gerente de un teatro sabe que se vendieron 900 boletos en total para la función del domingo. Los boletos del primer piso se vendieron en \$300.00 cada uno y los del segundo en \$200.00. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada nivel si en la caja hay \$230 000.00?

a) Denota por x el número de boletos vendidos del primer piso y por y el número de boletos vendidos del segundo piso. Escribe una ecuación que represente el total de boletos vendidos: ______________________

b) Escribe otra ecuación que indique el total de dinero que hay en la caja: __________

____

c) ¿Cuál de los métodos estudiados consideras más adecuado para resolver el sistema? Explica. ______________________

____

____

d) ¿Cuántos boletos de cada nivel se vendieron? ______________________

____

2. Analiza la situación. Responde lo que se te pide.
Con dos camiones como los de la figura 2.6, cuyas capacidades de carga son de 3 y 4 toneladas respectivamente, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

a) Escribe las ecuaciones que corresponden al número de viajes totales y a las toneladas de madera transportada. Forma el sistema de 2×2 y resuélvelas por el método que consideres más adecuado. Escribe las soluciones: ______

b) Traza en tu cuaderno la gráfica que represente al sistema de ecuaciones que planteaste. ¿Qué coordenadas tiene el punto de intersección? ______

Figura 2.6. Camiones transportadores de madera.

3. Resuelve los sistemas de ecuaciones con el método que consideres más adecuado; luego comenta con tus compañeros la razón por la que lo utilizaste.

a) $\begin{cases} 0.2r - 0.5t = 0.1 \\ 3r - 8t = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 2 \\ y - 2x = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{7}{24} \\ \dfrac{1}{4}(x-y) = \dfrac{1}{48} \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - \frac{1}{2}x = -2 \\ y - x = -1 \end{cases}$

4. Resuelve los problemas.

a) La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 255 km. Un coche sale de A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Al mismo tiempo, sale otro coche de B hacia A a 80 km/h. Suponiendo que su velocidad se mantiene constante, calcula el tiempo que tardan en encontrarse, y la distancia que ha recorrido cada uno hasta ese momento:

______

b) Reúnanse en equipo. Calculen los datos solicitados en conjunto para validar sus resultados. Argumenten o corrijan en caso necesario.

Conoce más

Para ver una explicación de cada método algebraico de solución de sistemas, ve a la página: http://www.edutics.mx/Uws. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. En una empresa trabajan 60 personas. 16 % de los hombres usa lentes, así como 20 % de las mujeres. Si el número total de personas que usan lentes es 11, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres hay en la empresa?

Piensa y sé crítico

La razón entre las edades de dos personas es de $\frac{2}{3}$. Sabiendo que se llevan 15 años, ¿cuál es la edad de cada una de ellas?

S14 Variación lineal y proporcionalidad inversa

Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

L1 Situaciones de variación lineal

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

La balanza de resorte o dinamómetro es un dispositivo que mide el peso de un objeto. El funcionamiento consiste en la medición de la elongación de un resorte mediante una corredera móvil sobre una escala graduada. Supón que fijas un dinamómetro en el techo y colocas un peso de 10 kg. Luego, mides la **elongación** del resorte que es de 12 cm.

a) ¿Cuánto se estira el resorte con un peso de 14 kg? Si éste se estiró 3 cm, ¿cuánto peso se colocó en él?

b) ¿Qué tipo de variación se da entre el peso colocado al resorte y su estiramiento?

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta relación?

d) ¿Qué maneras tienes para representar esta variación? Realiza dichas representaciones.

e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

f) Describe los procedimientos desarrollados para identificar y representar la variación.

2. Reúnanse en equipo. Elijan los modos de representación más adecuados para situaciones de variación lineal y no lineal. Corrijan sus resultados en caso necesario.

Glosario G

Elongación. En física (mecánica) se refiere al alargamiento de un material que se somete a una fuerza de tracción.

Desarrollo

Características de una variación lineal

Repasaremos las características principales de las variaciones lineales, a fin de tenerlas presentes al compararlas con otras, como las de proporcionalidad inversa.

1. Analiza la situación y realiza lo que se pide.

En algunas ciudades, el servicio de taxi lo prestan compañías que cobran de manera distinta. Hay empresas que cobran una cantidad fija inicial, lo que se conoce como "banderazo", y luego otra cantidad por la distancia recorrida, sea por kilómetro o fracción de éste. Una ciudad cuenta con tres compañías de servicio de taxi:

La cotorra, que cobra \$13.50 el banderazo y \$3.50 por kilómetro.

El volador, que usa la expresión $c = 3d + 16$ para su tarifa, donde c es el costo en pesos y d el número de kilómetros recorridos.

El acompañante, que cobra \$4.00 por kilómetro sin banderazo.

a) Completa la tabla 2.32, de la página 169, para hacer un comparativo por kilómetro de las tres compañías.

b) ¿Con qué compañía te conviene hacer un viaje de 3.5 km? ¿Por qué? ______________________

____

c) ¿Con cuál es más económico un recorrido de $11\frac{3}{4}$ km? ¿Por qué? ______________________

____

d) ¿Cuántos kilómetros recorres con $50.00 en cada compañía? Describe en tu cuaderno los procedimientos para obtener estas cantidades

La cotorra: ______________

El volador: ______________

El acompañante: ______________

Tabla 2.32 Costos por kilómetro (comparativo)

Kilómetros	La cotorra	El volador	El acompañante
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

e) Reflexiona: ¿cómo varían, en cada caso, los costos por kilómetro de cada compañía? ¿Cuál costo por kilómetro varía más rápido? ¿Cuál varía más lento? De acuerdo con el contexto del problema, ¿es conveniente incluir valores negativos?

- ¿De qué tipo es la variación de los cobros en las tres compañías? Explica.

____

f) Reflexiona: ¿Cuánto se paga por un recorrido de 2 km en cada compañía? ¿Y cuánto por un recorrido de 4 km? ¿Cuál compañía cobra el doble si se recorren el doble de kilómetros?

- ¿Qué compañía cobra mediante una relación proporcional directa? ¿Cómo se identifica a partir de los valores de la tabla? Explica. ______________

____

g) Reflexiona: ¿Cómo se determina la razón de cambio de cada compañía? ¿Qué relación existe entre la razón de cambio y la pendiente de una recta? ¿Qué significa que las compañías "La cotorra" y "El volador" cobren una cantidad de dinero aún sin haber recorrido ninguna distancia? ¿Cómo se relaciona este cobro con la ordenada al origen?

- Escribe una ecuación que represente los cobros de cada compañía.

La cotorra: __________ El volador: __________ El acompañante: __________

- ¿Cómo construyes estas expresiones algebraicas? ______________

____

- ¿Qué características tiene la representación tabular de una variación lineal?

____

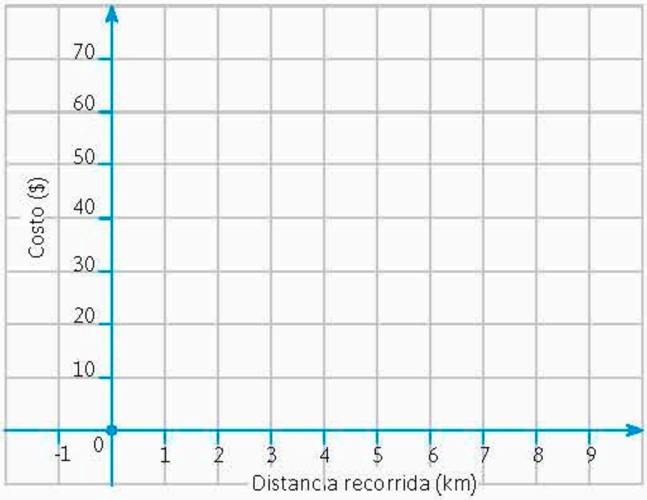
- ¿Qué características tiene su expresión algebraica? ______________

____

Infomáticas

En 1640, el francés Nicolás Sauvage abrió el primer servicio de taxis, dado por carruajes, en la ciudad de París.

2. En la página 170, haz la gráfica que representa los cobros de las tres compañías de transporte. Luego resuelve lo que se te pide.



a) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio para la representación del cobro de cada compañía? ¿Cómo determinaste estos valores? __________

b) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen en cada caso? Explica cómo lo obtuviste.

c) ¿Las gráficas crecen o decrecen? Explica. __________

d) ¿Qué características tiene la gráfica de una variación lineal? __________

3. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y procedimientos para responder.

Un *batitermógrafo* es un aparato que se encuentra en los submarinos y que mide la temperatura del agua en sus profundidades. La tabla 2.33 muestra la temperatura registrada por dicho aparato cada 200 metros de profundidad en un cierto lugar del océano.

Tabla 2.33

Profundidad (m)	Temperatura (°C)
0	20
200	16
400	10
600	7
800	6
1 000	4
1 200	4
1400	3
1 600	3
1 800	2

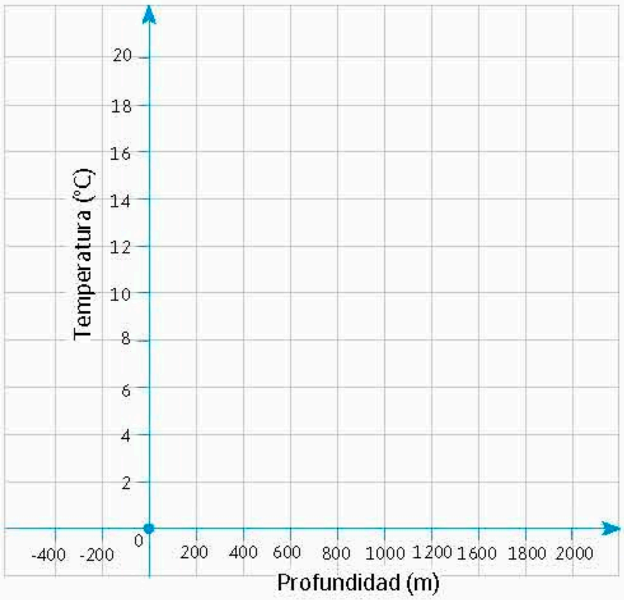
a) ¿Cuántos grados desciende la temperatura entre los 400 m y los 1 800 m de profundidad? __________

b) ¿Cuántos grados baja la temperatura entre los 1 000 m y los 1 200 m? __________

c) ¿Es una tabla que representa una variación lineal? Expliquen por qué. __________

d) ¿Qué características de una tabla que representa una variación lineal no se tienen en este problema? __________

e) Tracen la gráfica que modele la temperatura de acuerdo con la profundidad.



Conoce más

Para aplicar las características de la graficación de una variación lineal, ve a la página: http://www.edutics.mx/UdC. (Consulta: 20 de junio de 2018).

- Indiquen los intervalos en los que la temperatura se mantiene constante al descender el submarino. ______
- ¿Hay intervalos donde la gráfica es creciente? ¿Por qué? ______
- ¿Cuál es la razón de cambio en esta variación? Explica. ______
- ¿Qué características de la gráfica de una variación lineal no se presentan en esta situación? ______
- ¿Cómo describes la variación de la temperatura respecto a los metros que se descienden? ______

f) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. Discutan acerca de las características de las gráficas de variación lineal y en qué casos no se presentan.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En una competencia de caminata, un atleta ha recorrido 1.6 kilómetros en 8 minutos y mantiene ese mismo ritmo en todo el recorrido.
   a) Representa de manera tabular, gráfica y algebraica la carrera del atleta cada 8 min durante 1 h.
   b) Si la caminata es de 50 kilómetros, ¿en qué tiempo termina la competencia?

L2 Representaciones de proporcionalidad inversa

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

Para pintar una superficie determinada, el número de pintores que aparecen en la imagen tardan 80 horas, por lo que uno de ellos considera que hay que contratar más pintores para acabar antes con el trabajo.

a) ¿En cuánto tiempo lo harían 4 pintores más?
b) Si al contrario, del grupo original renuncian 2, ¿en cuánto tiempo harían el trabajo los restantes?
c) ¿Qué tipo de variación se da entre el número de pintores y los días que ocupan en su labor?
d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta relación?
e) ¿Qué maneras tienes para representar esta variación? Realiza dichas representaciones.
f) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
g) Describe los procedimientos realizados para identificar y representar la variación.

2. Reúnanse en equipo. Expresen las características de una variación inversa cuando se representa con gráficas o expresiones algebraicas. Argumenten o corrijan sus resultados si es necesario.

Desarrollo

Características de una proporción inversa

Anteriormente hemos trabajado con situaciones de proporcionalidad inversa, por lo que recordaremos cómo identificar un problema con este tipo de proporción, así como sus características principales.

1. Analiza la situación. Responde lo que se te pide.

Verónica es costurera y le han encargado que haga banderas iguales a partir de una pieza de tela de 60 m de largo.

a) Si cada bandera se hiciera con 2 m de tela, ¿cuántas se pueden hacer con los 60 m? ______
b) Y si fueran de 5 m de largo, ¿cuántas se podrían hacer? ______
c) ¿Cuáles fueron tus operaciones para conocer estas cantidades? ______
______
d) Si se le pidieron 50 banderas, ¿de cuántos metros sería cada una? ______
e) Y si el pedido fue de 90, ¿cuáles serían sus medidas? ______
______
f) ¿Qué operaciones realizaste en este caso? ______
______
g) Reflexiona: ¿qué pasa con la medida de cada bandera si aumenta la cantidad de banderas que se tienen que hacer? ¿Y qué pasa si disminuye la cantidad de banderas? Si la cantidad de banderas que se tienen que hacer aumenta al doble, ¿cómo varían las medidas de dichas banderas?

- ¿Qué tipo de relación se da entre el número de banderas y la medida de cada una? Explica. ____________________

h) Reflexiona: al multiplicar las medidas de cada bandera con su correspondiente cantidad de banderas que se pueden hacer, ¿qué cantidad se obtiene en cada caso? ¿Cómo se puede interpretar este resultado? ¿Qué significa esta cantidad?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________________

2. Martín ha pagado $2 700.00 para asistir durante 30 días a un club deportivo. Sólo irá una vez al día pero lo hará diario, sin falta.

a) ¿Cuánto será el precio por día en el sexto día de asistir al club? ¿En qué día el precio por día será de $300.00? ____________________.
- ¿Qué operaciones realizaste en cada caso? ____________________

____

b) Completa la tabla 2.34. En tu cuaderno completa una similar pero con 30 días. Usa calculadora.

c) ¿Qué parte representa el costo por día en el décimo día respecto al primer día de asistencia al club?
- ¿Qué tipo de variación se tiene entre el número de días en los que Martín visita el club y el precio por día? Explica. ____________________

____
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso? ¿Cómo la determinas? ____________________

d) ¿Qué características tiene una situación proporcional inversa? ¿Esta situación es una de este tipo? ____________________

____

e) ¿De qué manera se distingue una tabla de una proporción inversa respecto a otro tipo de variaciones. ____________________

____

f) Reúnanse en equipo con el propósito de recordar las características de una proporción inversa. Corrijan o argumenten si consideran necesario.

Tabla 2.34

Número de días	Precio por día
1	2 700
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Representaciones de una proporcionalidad inversa

A continuación trabajaremos las características de las proporciones inversas para que podamos representarlas de manera algebraica y gráfica.

3. Reúnanse en equipo. Analicen el siguiente caso.
Un paralelogramo tiene las medidas indicadas en la figura 2.7. Para que el área se mantenga constante, ¿cuánto debe medir la base si la altura aumenta 3 cm?

a) ¿Qué operaciones realizan para conocer la medida de la base con este cambio en la altura? ____________________

____

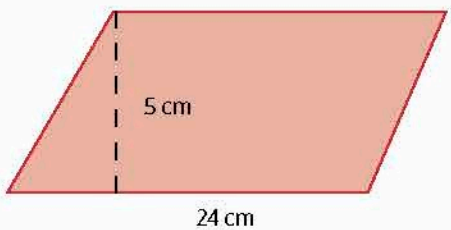


Figura 2.7

Tabla 2.35	
Altura (cm)	**Base (cm)**
1	
2	
3	
4	
5	24
6	
7	
8	
9	
10	

b) ¿Cuál es el valor de la base? ______________________________

c) ¿Qué tipo de relación proporcional se da entre la base y la altura si el área se mantiene constante? Expliquen. ______________________________

____

d) De acuerdo con las operaciones para este caso, completen la tabla 2.35 calculando las medidas de la base dadas las de la altura.

e) ¿Qué operaciones realizaron para saber cada medida de la base del paralelogramo al variar la altura? ______________________________

____

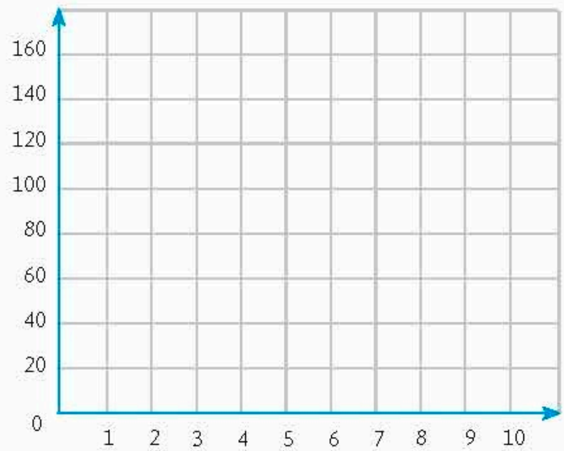
f) Describan un procedimiento para obtener el valor de la base (y), dado cualquier valor de la altura (x) y manteniendo constante el área: ______

____

____

g) Escriban una expresión algebraica que describa el procedimiento que han desarrollado: ______________________________

4. Intercambien compañeros de equipo. Construyan una gráfica que muestre la variación de la base y la altura de la actividad anterior.



Notación

Una gráfica es creciente si, al aumentar el valor de x, aumenta el de y. En cambio, si disminuye el valor de y al aumentar el de x, entonces decimos que la gráfica es decreciente.

a) ¿Qué características tiene esta gráfica? ______________________________

____

b) ¿Se puede obtener el valor de la razón de cambio? ¿Es posible saber el valor de la ordenada al origen? Expliquen. ______________________________

____

c) ¿Esta gráfica es creciente o decreciente? ¿Por qué? ______________________________

____

d) ¿Qué sucede si $x = 0$ en la expresión algebraica? ¿Cómo se observa este hecho en la gráfica? ______________________________

____

____

e) ¿Qué sucede si la altura es igual a 0? ¿Es posible esto en la situación planteada? ¿Por qué? ____

____

____

Portafolio P

¿Qué diferencias observas entre las representaciones de variaciones directas e inversas? Haz un cuadro comparativo al respecto.

5. Intercambien compañeros de equipo. Realicen lo que se les pide.
   a) Escriban una expresión general para describir una situación de variación proporcional inversa, con a como la constante de proporcionalidad. ______________

   ____

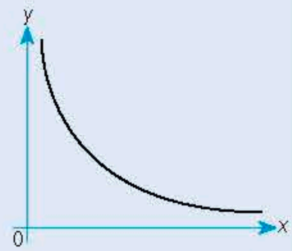
   b) Describan las características de una gráfica de una relación proporcional inversa.

   ____

   ____

   c) Busquen a otros equipos. Analicen sus resultados y procedimientos y, a partir de ellos, observen las características de las expresiones algebraicas y las gráficas de las relaciones proporcionales inversas.

Para una variación proporcional inversa, la expresión algebraica es de la forma $y = \frac{a}{x}$, con a como la constante de proporcionalidad. La gráfica de la variación es una curva conocida como hipérbola, la cual tiene la siguiente forma.



Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Supongamos que la expresión algebraica que describe el pago que recibe un actor por participar en varias películas es $y = \frac{600\,000}{x}$, donde x es el número de películas en las que va a actuar durante un año, mientras que y es el monto que va a cobrar.
   a) ¿Qué tipo de relación proporcional describe esta situación? Explica.
   b) Realiza la gráfica que describa la relación entre el pago y el número de películas en las que actúa.

Conoce más +

Para analizar un ejemplo de la graficación de una relación proporcional inversa, entra a: http://www.edutics.mx/UdF. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Piensa y sé crítico

Saúl tiene un presupuesto de \$100 000.00 para contratar cierto número de empleados para un proyecto en un límite de días.
¿Cómo es la relación del número de días con el número de empleados?
Construye la gráfica de ambos datos y contesta: ¿Cuántos empleados le conviene contratar a Saúl si no puede pagar menos de \$7000.00 a cada uno?

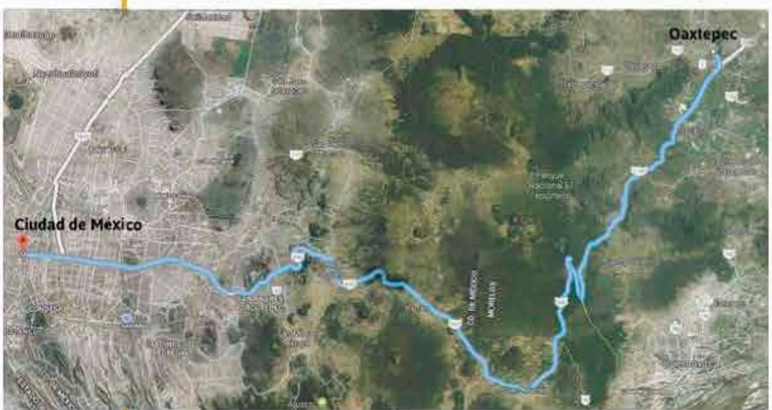
S15 Modelos de variación lineal y proporcionalidad inversa

Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

L1 Modelos de variación lineal y proporcionalidad inversa

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
   La familia Gómez se fue de día de vacaciones a Oaxtepec, que se encuentra a 100 km de distancia de donde viven. Cuando se dirigían al lugar, viajaron a una velocidad promedio de 80 km/h. De regreso había un poco de tránsito, por lo que recorrieron los 100 km de distancia en dos horas.
   a) ¿Cuánto tiempo tardaron en el recorrido de ida?
   b) ¿A qué velocidad viajaron de regreso?
   c) ¿Qué tipo de variación se da entre la velocidad y el tiempo que tardaron en el viaje?
   d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta relación?
   e) ¿Qué información es relevante para responder y cual no?
   f) Describe los procedimientos realizados para calcular los datos faltantes, así como para representar la variación.
2. Reúnanse en equipo. Revisen y compartan sus procedimientos y resultados. Argumenten o corrijan si es necesario.



Ruta Ciudad de México – Oaxtepec. Fuente: http://edutics.mx/w7k. (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

Desarrollo

Aplicaciones de la variación lineal

En situaciones que suceden en diferentes disciplinas, nos encontramos con que podemos modelarlas mediante una variación lineal.

Glosario

Fármaco. Sustancia que cura o previene una enfermedad.

Sustancia activa. Componente responsable de los efectos de una medicina.

1. Analiza la situación y responde lo que se pide.
Jaime estudia Medicina. En una clase ha aprendido que hay una nueva generación de **fármacos** en los que la cantidad de **sustancia activa** decae poco a poco hasta que el cuerpo la elimina completamente. Por ejemplo, un enfermo toma una medicina con 5 mg de sustancia activa, la cual decae 0.5 mg por día. Por lo que su profesor les solicita que describan la relación entre cantidad de sustancia activa y los días que dura dentro del cuerpo.
a) Completa la tabla 2.36, de la página 177, en la que se calcula diariamente la cantidad de sustancia activa dentro del enfermo.

b) Reflexiona: ¿cómo cambia la cantidad de sustancia activa conforme pasan los días? ¿Puedes identificar un patrón en la disminución de la sustancia activa? ¿Cuál es?
- ¿Cómo se relaciona ese patrón con la constante de proporcionalidad? ______________________

____

Tabla 2.36	
Días	Sustancia activa (mg)
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

c) ¿Cuál es la razón de cambio? ¿Cómo se relaciona ésta con la constante de proporcionalidad? ¿Cuál es? Explica su obtención.

____

____

d) Escribe una expresión algebraica que describa la situación. ______________________

____

e) ¿En cuántos días la sustancia activa queda totalmente eliminada del organismo del enfermo? Explica. ______________________

____

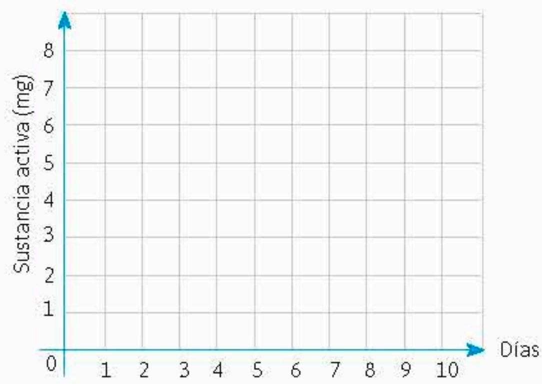
f) Traza la gráfica que describe la relación de la sustancia activa con los días que pasan.
- ¿La gráfica es ascendente o descendente? ¿Cómo se ve esto reflejado en la pendiente? ______________________

____

- ¿Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen? Describe su obtención: ______________________

____

Días vs. sustancia activa



g) Reúnanse en equipo. Reconozcan las características que tiene la gráfica de una variación lineal. Corrijan sus respuestas si es necesario.

Aplicaciones de la variación proporcional inversa

Otras situaciones se pueden describir por medio de las variaciones proporcionales inversas. Veamos algunos casos y recordemos las propiedades de este tipo de variaciones.

2. Reúnanse en equipos. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Analicen la situación.

La gráfica de la figura 2.8 muestra la relación entre el tiempo (t) que tarda un carro de control remoto en recorrer una distancia (d) fija de 50 m y la velocidad (v) que puede tener.

a) De acuerdo con la gráfica, ¿cómo es la relación entre la velocidad y el tiempo? Expliquen. ______________________

____

____

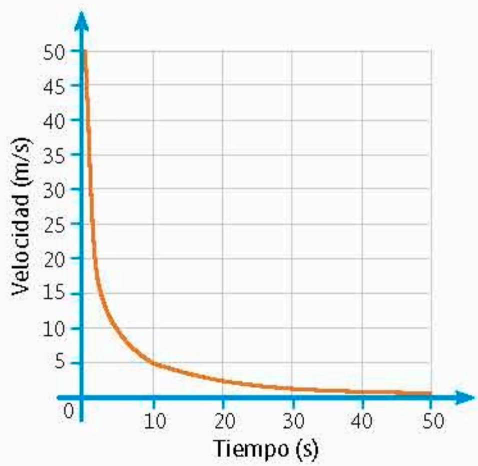


Figura 2.8

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad para esta situación? Describan cómo la obtienen. ______

c) ¿La gráfica crece o decrece? Expliquen. ______

d) ¿En qué intervalos crece o decrece más rápido? ______

e) ¿Y en cuáles crece o decrece más lento? ______

f) ¿Qué sucede cuando *x* se acerca a 0? ______

- ¿Se puede tener el caso $x = 0$? Expliquen. ______
- ¿Qué significa en la situación que $x = 0$? ______

g) ¿Qué sucede con la gráfica si los valores de *x* aumentan? ______

- ¿Qué significa esto en la situación? ______

Portafolio P

¿Hay otros principios físicos en los que se presenten proporciones inversas? Realiza una investigación en las que integres sus representaciones.

3. Cambien compañeros de equipo. Con los datos obtenidos de la gráfica, completen la tabla 2.37.

a) ¿Qué operaciones realizan para obtener los datos de la tabla en cada caso? ______

b) A partir de las operaciones que realizaron, escriban una expresión algebraica que describa la situación. ______

Tabla 2.37

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
1	
2	25
3	
4	
5	
6	
7	
8	

4. Reúnanse en parejas. Analicen la situación y realicen lo que se les pide. La ley de la demanda indica que cuando el precio de un producto aumenta, la cantidad demandada disminuye; y cuando el precio del producto disminuye, la cantidad demandada aumenta. Supón que un impresor cobra $3 240.00 por estampar una playera, por estampar 9, $360.00 y por 90, diez veces menos.

a) ¿Cuál es la expresión que determina cuánto cobra el impresor? Explica cómo la determinaste. ______

b) ¿Qué tipo de variación proporcional se tiene en la situación? Expliquen. ______

c) ¿Cuál es el costo por estampar 20 playeras? ______

d) ¿Cuántas playeras estampó el impresor si el precio fue de \$40.50? ______

e) Describan sus procedimientos para obtener cada cantidad. ______

f) Tracen en su cuaderno la gráfica que describe el precio por estampado con respecto al número de playeras.

g) Con otros equipos, analicen las características de la gráfica y la expresión algebraica de una variación proporcional inversa. Argumenten sus respuestas y corrijan si es necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. La masa de un material se puede obtener multiplicando la **densidad** de ese material por el volumen que ocupa. Un cuerpo de 3 kg/m³ de densidad ocupa un volumen de 0.8 m³, otro cuerpo con densidad de 5 kg/m³ tiene la misma masa que el anterior.
   a) Escribe la relación entre la densidad y el volumen para el segundo cuerpo.
   b) ¿Qué volumen tiene el segundo cuerpo?
   c) Realiza en tu cuaderno las representaciones tabular, gráfica y algebraica de esta situación.

Glosario G

Densidad. Propiedad física de la materia que mide la cantidad de ésta en un espacio delimitado.

Piensa y sé crítico

La presión (P) sobre un objeto es igual a la fuerza (F) que se aplica entre el área (A) donde se ejerce.

$$P = \frac{F}{A}.$$

Supón que una persona está parada en un piso de madera y que la fuerza que ejerce sobre el piso es de 588 N (aproximadamente la que ejerce una persona con masa de 60 kg).

a) Si el área del piso es igual a 10 m², ¿cuál es la presión que se ejerce?
b) ¿Y si el área del piso es igual a 5 m², ¿cuál es la presión que se ejerce?
c) ¿Y si el área es 1 m², ¿cuál es la presión?
d) Traza una gráfica que describa la relación entre presión y área con una fuerza constante de 588 N.
e) Con base en la gráfica, ¿qué pasa con la presión ejercida si disminuye el área?
f) ¿Cómo se aplica esta relación al pisar a alguien con un zapato de tacón de aguja y con un tacón de zapato plano?

¿POR QUÉ LAS CÉLULAS SON PEQUEÑAS?

Para que las células funcionen correctamente, deben intercambiar constantemente iones, gases, nutrientes y desechos con su medio ambiente. Este intercambio se da a través de la superficie de la célula: su membrana. Por ello deben abarcar la mayor superficie posible con un volumen determinado. Esto da origen a una relación superficie-volumen.

La mayoría de las células son microscópicas.

Relación superficie - volumen

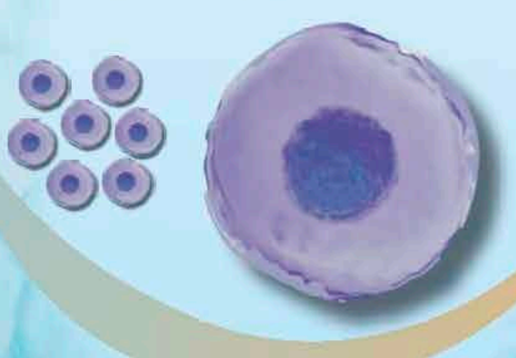
La relación **superficie-volumen** se define como el cociente entre el área superficial *A* de un objeto y el volumen *V* del mismo.

$$A : V = \frac{A}{V}$$

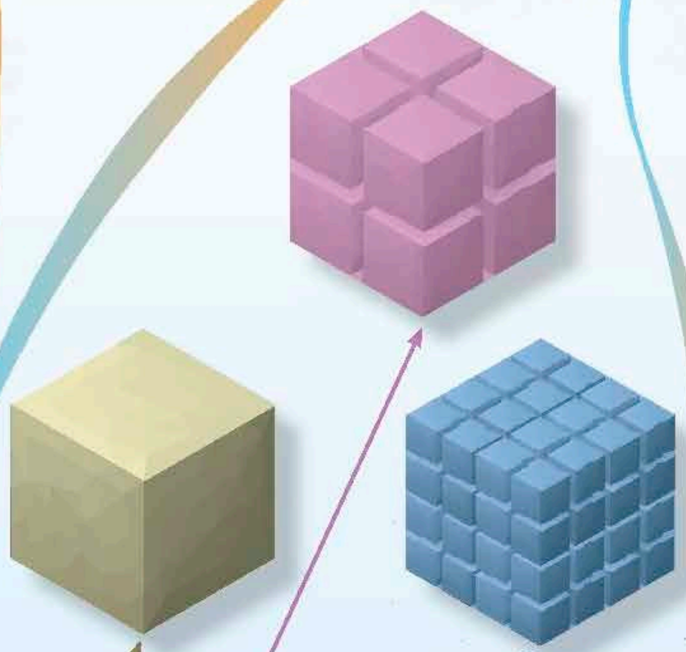
Superficie
Membrana plasmática
Intercambio de materia.

Volumen
Citoplasma y organelos
Metabolismo.

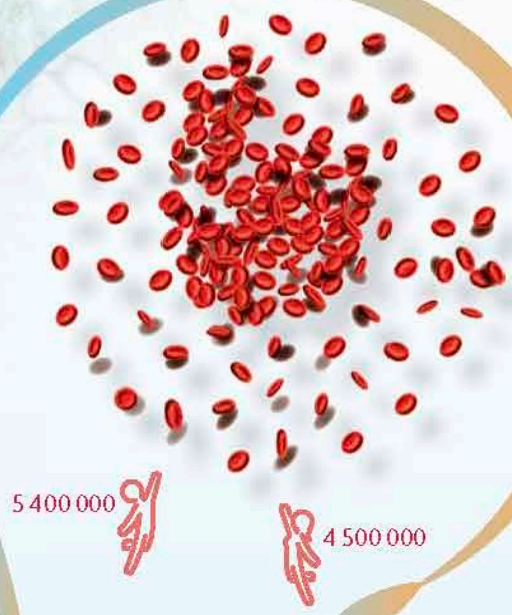
Muchas células pequeñas juntas tienen una relación $A : V$ mayor que una célula grande que tenga el mismo volumen. Así, cantidades proporcionalmente mayores de sustancias pueden intercambiarse con el medio ambiente más rápido.



Para comprender esta idea supongamos que las células tienen forma cúbica.



Arista de cada cubo	1 u	0.5 u	0.25 u
Área total	6 u^2	12 u^2	24 u^2
Volumen total	1 u^3	1 u^3	1 u^3
A : V	6 : 1	12 : 1	24 : 1



Un ejemplo son los eritrocitos o glóbulos rojos, que transmiten oxígeno a todo el cuerpo. La cantidad normal en humanos varía entre 4 500 000 (mujer) y 5 400 000 (hombre) por milímetro cúbico (o microlitro) de sangre.

En un organismo multicelular, la gran superficie que presentan la multitud de células pequeñas que lo forman permite optimizar las funciones necesarias para la supervivencia. Así, los organismos grandes deben consistir en muchas células pequeñas en volumen pero con una gran relación superficie-volumen.

Analiza y resuelve.

- Si una célula creciera mucho, ¿qué inconvenientes tendría?
- Busca ejemplos de organismos (hongos, insectos, plantas) que muestren en algún órgano o sistema alguna ventaja explicable con la relación superficie-volumen.

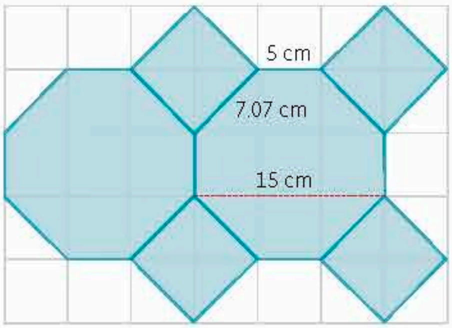
S16 Perímetro y área de polígonos regulares

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

L1 Perímetro y área de polígonos

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
Pablo colocará en su baño una figura hecha con azulejos con formas de octágono y de cuadrado como se muestra en el modelo.



a) Identifica el perímetro de la figura. ¿Qué valor tiene?
b) Es posible dividir un octágono en figuras de las cuales sepas calcular su área? ¿En cuáles? ¿Con estas figuras puedes deducir el área de un octágono? ¿Cómo?
c) ¿Qué área tiene un octágono?
d) Identifica el área de la figura, ¿cuál es su valor?
e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
f) Describe el procedimiento que realizaste para conocer el área total.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas y procedimientos. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Perímetro de polígonos

Repasemos el cálculo de perímetros de polígonos, pues será clave para el cálculo del área de polígonos regulares.

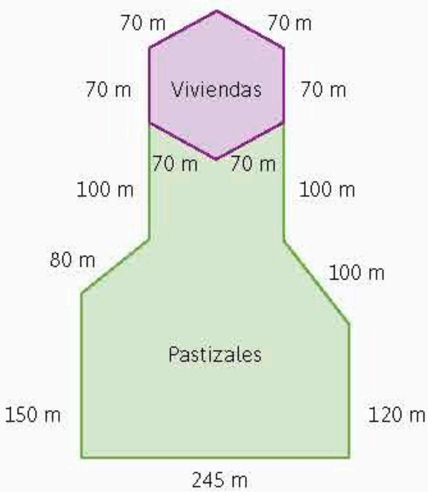


Figura 2.9. Esquema del rancho.

1. Juan tiene un rancho e instalará alambre alrededor de los pastizales para que sus animales no escapen (figura 2.9).
a) ¿Cuánto alambre necesita para rodear toda su propiedad si pondrá solo dos hilos de alambre? ¿Y si pone tres? ______

______

b) ¿Cuánto alambre necesita para poner tres hilos alrededor de la propiedad excepto la zona de viviendas? ______

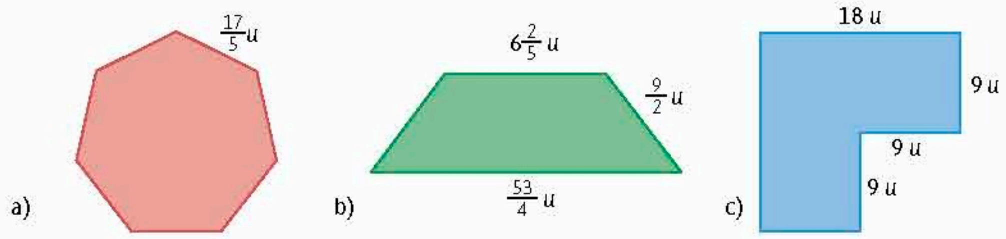
c) ¿Qué forma tiene la zona de las viviendas? ¿Cuánto alambre necesita para poner cuatro hilos alrededor de ésta zona?

______

d) Explica distintas formas de calcular la longitud del alambre alrededor de las viviendas. ______

______

2. Calcula el perímetro de los polígonos de la figura 2.10.



$P =$ ________________ $P =$ ________________ $P =$ ________________

Figura 2.10. Diversos polígonos.

a) Describe el procedimiento que seguiste para calcular los perímetros. __________

b) Reúnanse en equipo. Comparen los procedimientos para calcular los perímetros. ¿Difieren? ¿Obtienen los mismos resultados? Si es así, discutan por qué ocurre esto.

3. A partir de la información dada sobre un polígono regular, traza en tu cuaderno la figura y calcula su perímetro. Anótalo aquí.

a) Su lado mide 3.5 cm y se puede trazar únicamente una diagonal desde cualquier vértice. __________

b) El valor de un ángulo central es de 72° y mide 3 cm de lado. __________

c) Cada lado mide 4 cm y se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros congruentes. __________

d) Reúnanse en equipo. Discutan lo siguiente: ¿obtuvieron las mismas figuras? ¿Por qué? __________

Área y descomposición de figuras

Trabajemos dividiendo una figura geométrica en otras cuyas expresiones son conocidas para calcular sus áreas.

4. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder.

A un carpintero le encargaron una mesa de juego con forma octagonal y le dieron un esquema (figura 2.11).

a) Encuentra el área del tablero. Explica tu procedimiento. __________

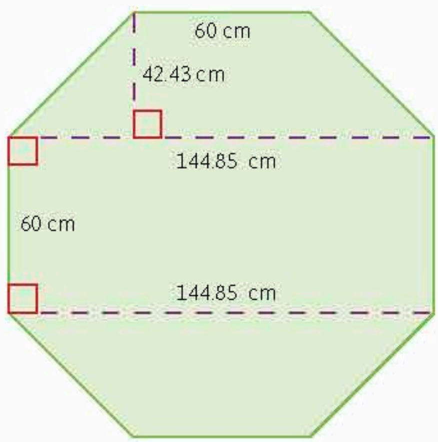


Figura 2.11. Esquema de una mesa octagonal.

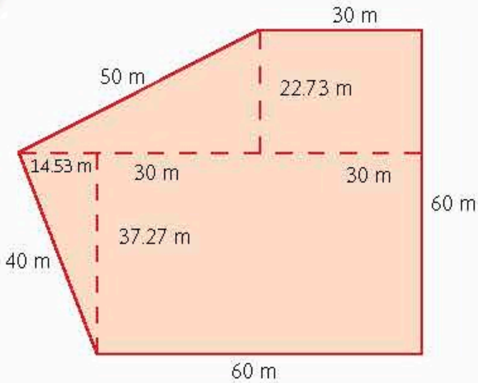


Figura 2.12. Esquema de un terreno.

b) Reúnanse en equipo y comparen su resultado, así como la manera en que calcularon el área. Determinen quién calculó el área con el menor número de operaciones.

5. Juan quiere comprar el terreno cuyo croquis se muestra en la figura 2.12 y busca conocer su superficie.

a) ¿Cómo calculas el área del terreno? ¿Cuál es? ______________________

____

____

____

b) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Dividan de otra manera el terreno. Si calculan el área con base en esta nueva división, ¿obtendrán la misma área? ¿Por qué? Discutan.

Conoce más

Para ver un ejemplo de cómo descomponer un polígono irregular para obtener su área, entra en: http://www.edutics.mx/UYb. (Consulta: 20 de junio de 2018).

6. Reúnanse en equipo. Hagan dos descomposiciones distintas para cada polígono de la figura 2.13. Midan los datos que necesiten y calculen el área de cada polígono de dos maneras distintas.

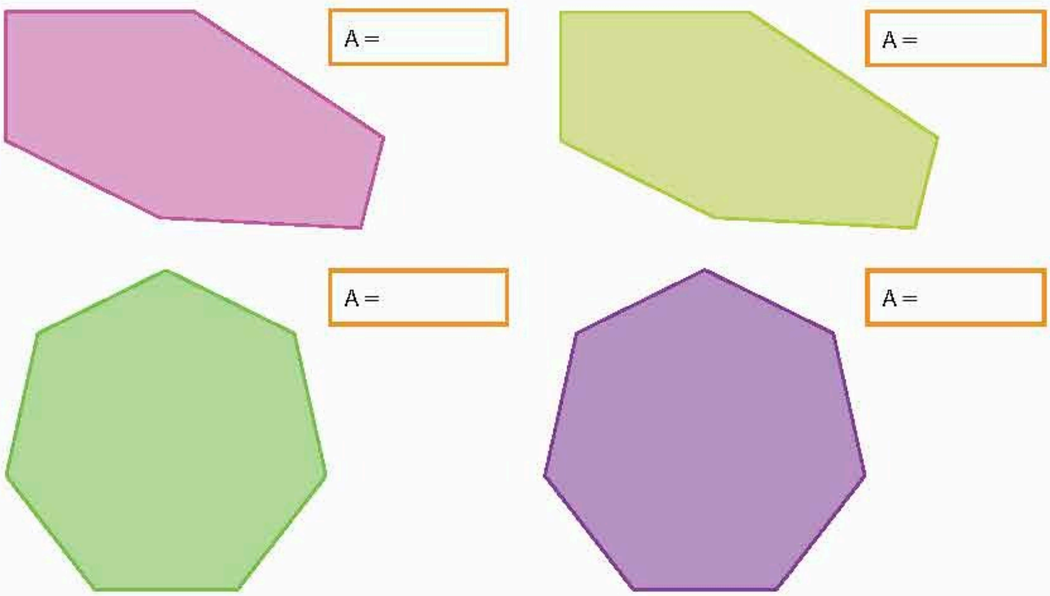


Figura 2.13. Dos tipos de polígonos.

a) ¿Cómo son las áreas para cada par de figuras iguales? ¿Por qué creen que sea así?

____

b) ¿Qué diferencias observan entre las descomposiciones de los polígonos irregulares y las de los regulares? ______________________

____

c) ¿Qué consideran que es más conveniente, dividir en muchas o en pocas figuras? Expliquen: ______________________

____

d) Compartan sus resultados con otros equipos. En caso de que haya diferencias, comparen procedimientos y argumenten. Corrijan si es necesario.

Área de polígonos regulares

Con base en las fórmulas para calcular el área de un triángulo equilátero y de un cuadrado, desarrollaremos el caso de polígonos regulares que tienen 5 lados o más.

7. Reúnanse en parejas y determinen la estrategia y procedimientos para responder. Analicen los polígonos de la figura 2.14. Lean la información y luego hagan lo que se pide.

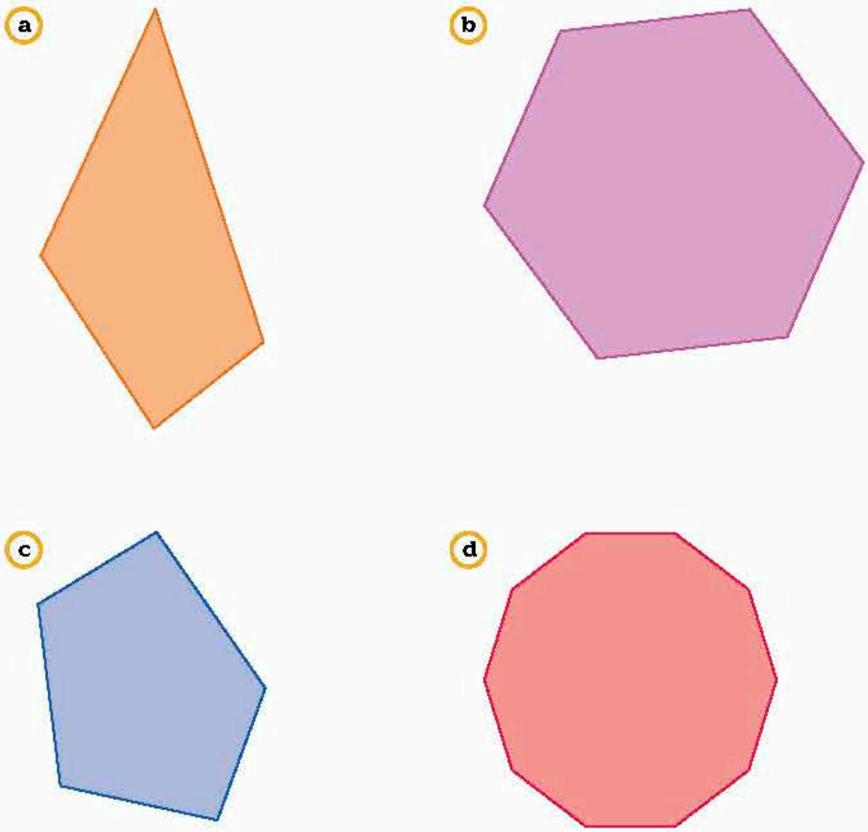


Figura 2.14. Diversos polígonos.

a) Tracen la circunferencia circunscrita y la inscrita a cada polígono de la figura 2.14. ¿Pudieron trazarlas en todos los casos? ¿En cuáles sí y en cuáles no? ____________

____

b) ¿Cómo son el centro de la **circunferencia circunscrita** y el de la **circunferencia inscrita**? ______________________________

____

c) ¿Cómo es la longitud del centro de la circunferencia inscrita al punto que toca en cada uno de los lados? ______________________________

d) ¿Pueden descomponer los polígonos tomando en cuenta sus diagonales? ¿Cómo?

____

____

e) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Discutan acerca de cómo usan la longitud del centro de la circunferencia inscrita al punto que toca en cada uno de los lados de un polígono regular para calcular su área.

Glosario G

Circunferencia circunscrita. La que pasa por todos los vértices de un polígono y contiene a la figura completamente en su interior.

Circunferencia inscrita. La que pasa por un solo punto de cada lado de un polígono y la figura contiene completamente en su interior a la circunferencia.

El **centro** de un **polígono regular** es el centro de la circunferencia inscrita o de la circunferencia circunscrita.
La perpendicular entre el centro de un polígono regular y uno cualesquiera de sus lados es la **apotema**, que coincide con el radio de la circunferencia inscrita.

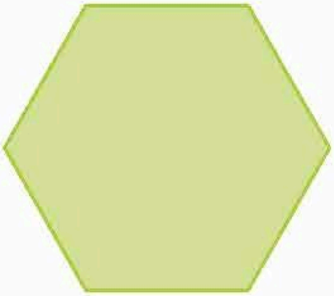


Figura 2.15. Hexágono.

8. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder. Consideren el polígono de la figura 2.15.

a) Localicen el centro del polígono y tracen la circunferencia circunscrita. Luego dibujen triángulos tales que uno de los vértices de cada uno sea el centro del polígono. Después tracen la apotema.

b) Reflexionen y discutan: ¿cuántos triángulos se forman? ¿Cómo son esos triángulos? ¿Cómo se relaciona la cantidad de triángulos formados con la cantidad de lados del polígono? ______

______

c) Para calcular el área de un triángulo se requiere conocer una base y su altura correspondiente. ¿Con qué elemento de los triángulos formados coincide el lado del polígono? ¿Y la apotema? ______

d) Midan y calculen el área de uno de los triángulos. ¿Cuál es el valor? ¿Cuál es el área de todos los triángulos juntos? ______

e) ¿Cómo se relaciona el área de todos los triángulos juntos con el área del polígono? ¿Cuál es el área del polígono? ______

______

f) Escriban una expresión algebraica para calcular el área de un hexágono. ______

______

g) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. Tracen algunos hexágonos en su cuaderno y calculen sus áreas con triángulos y con la expresión que obtuvieron. Discutan cuál es la función de la apotema en el cálculo.

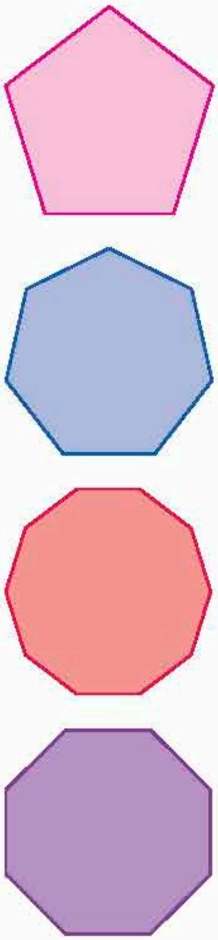


Figura 2.16. Diversos polígonos.

9. Analiza los polígonos de la figura 2.16 y completa la tabla 2.38.

Tabla 2.38

Respecto a los triángulos que componen el polígono					Respecto a los elementos del polígono			
Número (n)	Base (l)	Altura (h)	Área de cada uno	Área total	Número (n)	Perímetro ($P = n \times l$)	Apotema (a)	$P \times a$
5					5			

a) Escribe una expresión algebraica para calcular el área de los polígonos con base en los triángulos que los componen. ______

b) Escribe una expresión algebraica para calcular el área de un polígono regular con base en los elementos del polígono. ____________

c) ¿Cómo son estas dos expresiones? ¿Por qué? ____________

____

d) Anota un procedimiento para calcular el área de cualquier polígono regular y propón una fórmula. ____________

____

e) Reúnanse en equipo y comparen sus procedimientos y resultados. Argumenten y corrijan si es necesario. Tracen varios polígonos regulares e intercambien las medidas necesarias para que calculen sus áreas y así validen su fórmula.

Notación

Recuerda que la altura se denota con la letra h, eso permite que la apotema se exprese con la literal a, con el fin de evitar confusiones.

El área de **un polígono regular** de n lados se obtiene multiplicando el perímetro P por la apotema a y dividendo el resultado entre 2. Algebraicamente esto es:

$$A = \frac{p \times a}{2} = \frac{n \times l \times a}{2}.$$

10. Resuelve las siguientes situaciones. Haz los cálculos en tu cuaderno.

a) El Pentágono (figura 2.17) tiene un área de 116 000 m^2 y sus lados miden 230 m. Hay pasillos que parten del centro hacia los lados de manera que forman la apotema del pentágono. ¿Qué longitud tienen los pasillos? ____________

b) Se impermeabilizará el techo de un centro de convenciones que tiene la forma hexagonal regular. Los lados miden 80 m y la apotema, 69 m. ¿Qué área se impermeabilizará? ____________

Figura 2.17. El Pentágono es un edificio con forma pentagonal. Está en Washington D.C., EUA.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Un pentágono, un hexágono y un decágono tienen el mismo perímetro, que es igual a 30 cm. ¿Cuál es el valor del lado en cada polígono? ¿De qué manera obtienes esos valores? ¿Cuál de ellos tendrá mayor área? Explica por qué.

Conoce más

Para ver diversos ejercicios relacionados al área de polígonos regulares, ve a la página: http://www.edutics.mx/UYz. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Piensa y sé crítico

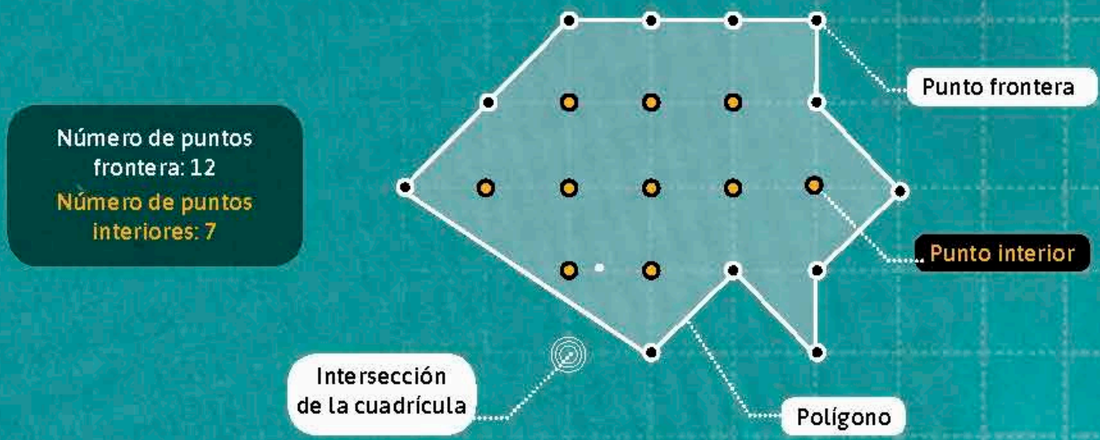
Las celdas en un panal de abejas están hechas de cera y vistas desde arriba tienen forma hexagonal. ¿Por qué son de esta forma y no cuadrangulares, triangulares o pentagonales? Considera que el objetivo es que se almacene más miel con el menor uso de cera para hacer el contorno. Usa el cálculo de áreas y perímetros para que expliques la razón de ello. Discute luego con tus compañeros al respecto.

POLÍGONOS, CUADRÍCULAS Y ÁREAS

La fórmula de Pick nos permite calcular el área de un polígono que cumpla ciertas condiciones. Se debe al matemático austriaco Georg Alexander Pick que lo demostró en 1899.

Condiciones en una cuadrícula

Supongamos que tenemos una cuadrícula en la que cada intersección corresponde a un punto del plano cuyas coordenadas son números enteros. En esta cuadrícula tenemos un polígono simple, es decir, sin agujeros, que cumple que todos sus vértices están situados sobre intersecciones de la cuadrícula. A los puntos que quedan dentro del polígono se le llama puntos interiores y a los que quedan sobre los lados del polígono (pueden ser vértices) se les denomina puntos frontera.



Fórmula de Pick

Si representamos el número de puntos interiores con la letra *i* y el número de puntos frontera con la letra *f*, el área *A* del polígono puede calcularse de la siguiente forma:

$$A = \underbrace{i}_{\text{Número de puntos interiores}} + \frac{\overbrace{f}^{\text{Número de puntos frontera}}}{2} - 1$$

Cálculo con la fórmula de Pick

Número de puntos interiores i: 4
Número de puntos frontera f: 12

$$A = 4 + \frac{12}{2} - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

$A = 9\ u^2$

Número de puntos interiores i: 4
Número de puntos frontera f: 6

$$A = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

$A = 6\ u^2$

Número de puntos interiores i: 2
Número de puntos frontera f: 12

$$A = 2 + \frac{12}{2} - 1 = 2 + 6 - 1 = 7$$

$A = 7\ u^2$

Analiza y resuelve

- ¿La fórmula de Pick es válida para calcular el área de cualquier polígono? ¿Habrá algunos en lo que no se cumple? ¿En cuáles?
- ¿Cuál es el área que aproxima a la de la región sombreada en la imagen?

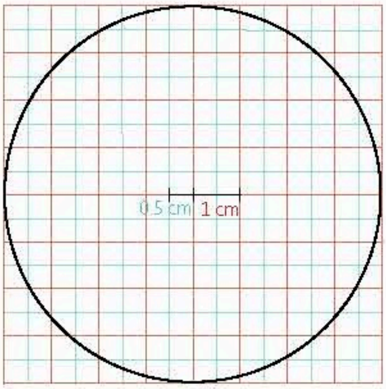
S17 Área del círculo

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

L1 Deducción de la fórmula del área del círculo

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.



Mario piensa que puede aproximar el área del círculo usando cuadrados, puesto que sabe calcular el área de éstos. Ha trazado un círculo y dos cuadriculas: en la roja, cada cuadrito mide 1 cm de lado y en la azul, 0.5 cm.

a) Aproxima el área del círculo usando la cuadrícula roja y la azul.
b) ¿Puedes seguir aproximando el área del círculo? ¿Cómo?
c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
d) Describe el procedimiento que realizaste para responder.

2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Elementos del círculo

Repasemos los elementos del círculo que utilizaremos en el cálculo del área.

1. Traza en el espacio un círculo de 3 cm de radio.
   a) ¿Cuál es la medida del diámetro? ____________
   b) ¿Qué es el número pi (π)? ____________
   c) ¿Cuánto mide la circunferencia? Explica tu procedimiento. ____________
   ____
   ____
   d) Escribe una fórmula que permita obtener la medida de la circunferencia a partir del radio. ____________
   ____

2. Completa la tabla 2.39. Usa calculadora.

Tabla 2.39. Medida de la circunferencia de algunos círculos

Radio	Diámetro	Circunferencia
7 m		
	15 cm	
		75.3982 cm
5 dm		

Fórmula del área del círculo

A partir de las áreas de polígonos regulares, que ya han sido tratados, determinaremos la expresión para obtener el área del círculo.

3. Reúnanse en equipo. Estipulen la estrategia y los procedimientos para responder. Consideren los polígonos de la figura 2.18.

a) Tracen la circunferencia circunscrita a cada uno. Expliquen cómo la trazaron.

____

b) Calculen el perímetro (*P*) y área (*A*) de cada uno. Hagan las operaciones en su cuaderno.

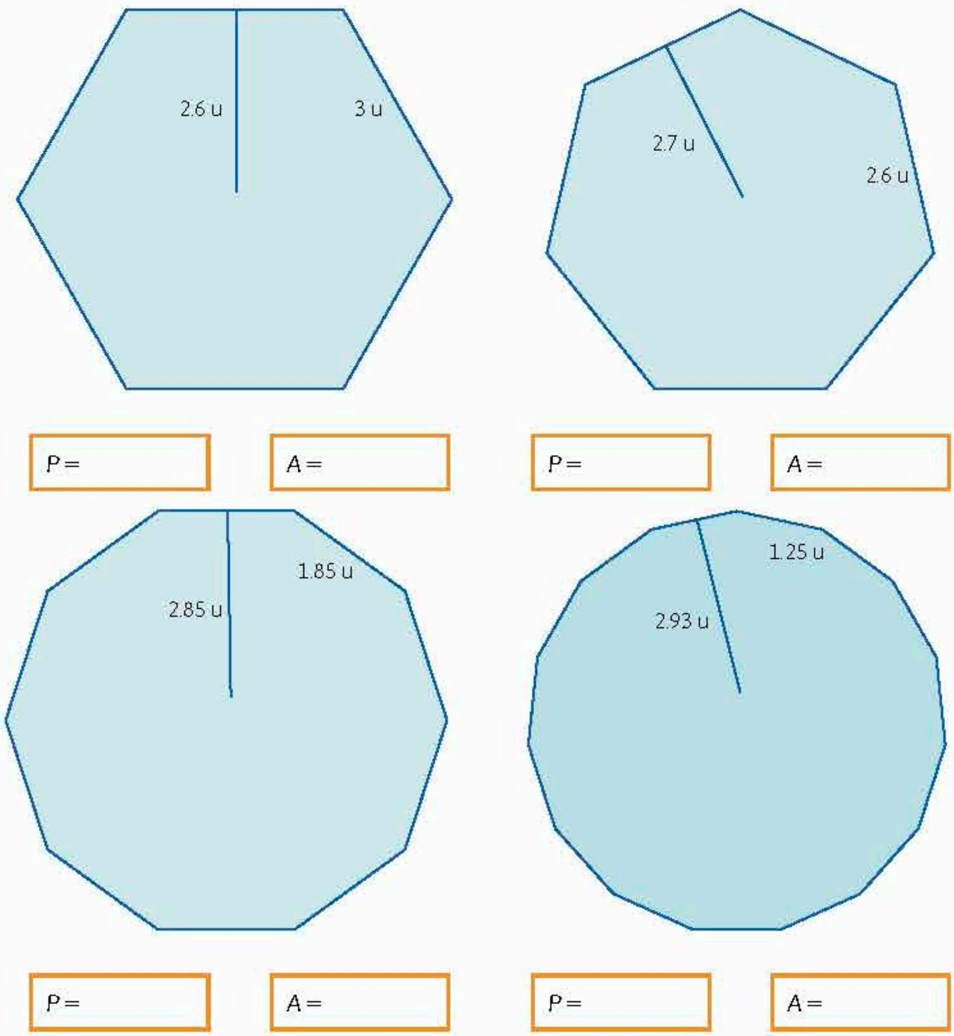


Figura 2.18. Diversos polígonos.

c) Si el radio de las circunferencias circunscritas mide 3 u, ¿cuál es su perímetro?

____

d) ¿Qué sucede con el perímetro de los polígonos con respecto al de la circunferencia a medida que aumenta el número de lados? ______________________

e) ¿Cuántos lados tendrá el polígono cuyo perímetro coincida completamente con la circunferencia? Expliquen. ______________________

____

- En este caso, ¿con cuál elemento de la circunferencia coincidirá la apotema? ______
- El perímetro del polígono, ¿con cuál perímetro coincide? ______

f) ¿Cuáles son las fórmulas para calcular el área de un polígono regular de *n* lados y el perímetro de un círculo? ______

g) Escriban una expresión algebraica para calcular el área del círculo a partir de este análisis. ______

h) Comparen sus resultados con los de otros equipos. Propongan círculos con diversas medidas de radio y verifiquen su fórmula al calcular su área.

Infomáticas

Leonardo da Vinci fue un sabio italiano que nació el 15 de abril de 1452 y murió el 2 de mayo de 1519. Sus obras pictóricas más famosas son *La Gioconda* o *Mona Lisa* y *La última cena*. Sus ideas se recogieron en 22 libros donde aparecen inventos de todo tipo. Leonardo da Vinci propuso cómo calcular el área de un círculo dividiéndolo en sectores.

¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo que tiene la misma área de un círculo de radio 1?

4. Leonardo da Vinci propuso cómo calcular el área de un círculo usando sectores del mismo (figura 2.19). Reúnanse en equipo. Realicen lo que se pide.

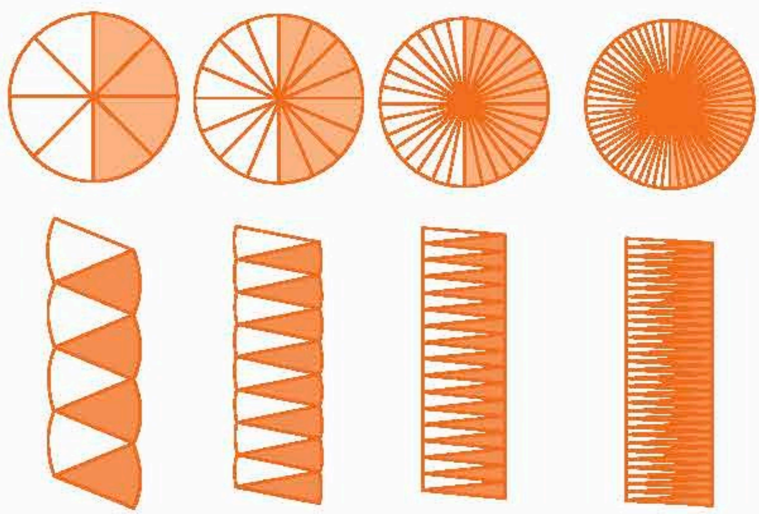


Figura 2.19. Reacomodo de sectores circulares.

a) Tracen en una hoja de papel un círculo de 5 cm de radio.

b) Divídanlo en 8 sectores iguales y córtenlos; luego reacomoden con el patrón indicado en la figura 2.19 y péguenlos en otra hoja.

c) Tracen otro círculo de la misma medida, divídanlo en 16 sectores, recórtenlos y acomódenlos con el mismo patrón. Peguen la forma resultante en la misma hoja que la primera.

- ¿A qué figura se asemejan los acomodos? ______
- ¿Cómo obtienen el área aproximada de cada acomodo? ______

______

d) Si aumentan el número de sectores en que dividen el círculo, ¿qué sucederá con el reacomodo? ______

e) ¿Qué parte del acomodo coincidirá con el radio del círculo? ¿Cuál con el perímetro? Expliquen. ______

______

f) ¿De qué manera se obtiene el área *A* del acomodo resultante en función del radio y el perímetro? ______

Conoce más

Te recomendamos el libro *Matemáticos que cambiaron al mundo*, de Douglas Jiménez, en el que puedes leer las biografías de algunos matemáticos famosos de la antigüedad. Búscalo en tu biblioteca del aula.

g) Escriban una fórmula para calcular el área del círculo. ____________________

h) ¿Cómo es la expresión obtenida comparada con la de la actividad anterior? Expliquen. ____________________

____

5. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y los procedimientos para responder. Consigan plastilina y un compás.

a) Tracen un círculo en una hoja de papel y cúbranlo con plastilina.

b) Dividan el radio del círculo en seis partes iguales y corten el círculo mayor en seis círculos más pequeños.

c) Dibujen un radio y corten los círculos en ese segmento (figura 2.20a).

d) Con cuidado, separen cada tira y extiéndanla. Acomódenlas una junto a otra, de la más larga a la más corta, como se muestra en la figura 2.20b.

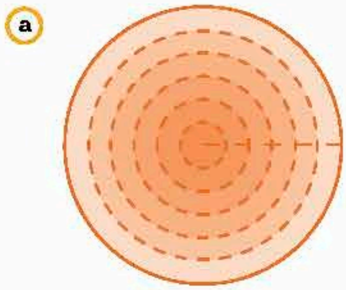


Figura 2.20a Descomposición de un círculo en tiras.

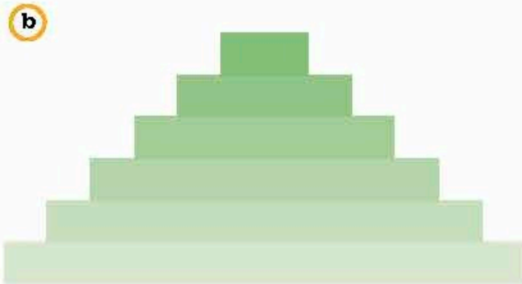


Figura 2.20b Arreglo de las tiras.

e) ¿A qué figura se asemeja el acomodo? ____________________

f) ¿Cómo obtienen el área aproximada del acomodo? Expliquen. ____________________

____

g) Si aumentan el número de divisiones del radio del círculo, ¿qué sucede con el acomodo? Expliquen. ____________________

h) Si aumentan infinitamente el número de divisiones del radio del círculo, ¿qué figura es el acomodo? Expliquen. ____________________

- En este caso, ¿a qué elemento del triángulo corresponde el radio r del círculo? ¿Y el perímetro P? ____________________
- ¿De qué manera se obtiene el área A del acomodo resultante en función del radio r y el perímetro P? ____________________

i) Escriban una fórmula para calcular el área del círculo. ____________________

j) ¿Cómo es la expresión obtenida comparada con la de las actividades anteriores? Expliquen. ____________________

____

El área de un círculo se obtiene elevando al cuadrado la medida del radio r y multiplicándo el resultado por π. Esto se simboliza con la expresión:

$$A = \pi \times r^2$$

Infomáticas

El Talmud es considerado como el libro que reúne las leyes y costumbres judías. En uno de los diversos comentarios que se han hecho acerca de él se presenta una aproximación al área del círculo. Imagina que el interior de un círculo de radio r se cubre con círculos concéntricos de lana. Cortando éstos en un radio, se pueden estirar para armar un triángulo isósceles.

¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo que tiene la misma área de un círculo de radio 1?

Conoce más

Para conocer más detalles de esta forma de demostrar el área del círculo, consulta la página: http://www.edutics.mx/Ug9. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Problemas de cálculo de área del círculo

Apliquemos lo aprendido respecto al cálculo del área de un círculo.

6. Mónica adquirió una alfombra circular cuyo radio mide 1.2 m. Si el espacio en el que planeó colocarla es un cuadrado de 4.8 m^2, ¿cabrá la alfombra? ¿Cuántos metros cuadrados faltan o sobran? ______

7. Se fabricará una ventana de forma circular con un marco de acero inoxidable y vidrio templado. El grosor del cancel es de 1 cm y el radio de la ventana de 30 cm. El precio del acero es de $1 200.00 el metro y el del vidrio es de $1 600.00 por metro cuadrado.

a) ¿Cuántos metros de marco se ocuparán? ______

b) ¿Cuántos metros cuadrados de vidrio se ocuparán? ______

c) ¿Cuál es el precio total de la ventana? ______

Tabla 2.40. Algunas medidas de tubos

Diámetro (in)	Área transversal (in^2)
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{4}$	
1	
$1\frac{1}{2}$	
2	
3	
4	

8. Miguel es plomero y sabe que la cantidad de agua que puede abastecer una tubería depende del área transversal del tubo. También sabe que los tubos se clasifican y se piden según la medida de su diámetro, dada principalmente en pulgadas.

a) Completa la tabla 2.40 con las principales medidas de diámetro de los tubos.

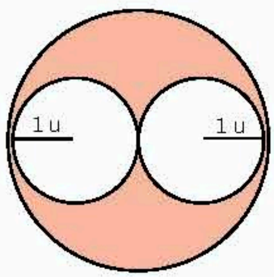
b) ¿Cuántas veces es mayor el área transversal de una tubería de $\frac{1}{2}$ in que una de $\frac{1}{4}$ in? ______

c) ¿Cuántas veces es mayor el área transversal de una tubería de 3 in que de una de $\frac{3}{4}$ in? ______

d) ¿Cuántas tuberías de 1 in son necesarias para distribuir la misma cantidad de agua que una tubería de 4 in? ______

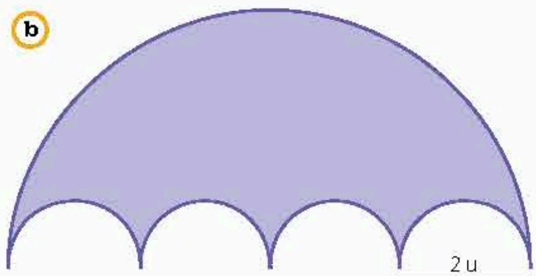
9. Calcula el área sombreada de las figuras 2.21a y 2.21b.

a



A =

b



A =

Figura 2.21. Secciones sombreadas de círculos.

10. Observa el esquema de una cancha de basquetbol de la figura 2.22 de la página 195. Nota que las medidas están en pulgadas y pies.

a) Calcula el área de una de las regiones de tiros de falta (*foul*) formada por un rectángulo y un semicírculo. ______

b) Determina las áreas de los círculos centrales. ______

c) Calcula el área de las dos regiones de tres puntos. ______

Figura 2.22. Cancha de basquetbol con medidas.

11. Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados y procedimientos.

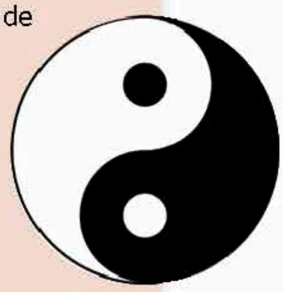
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En 2009, la Secretaría de Turismo de la Ciudad de México entregó un certificado de récord Guinness al restaurante giratorio más grande del mundo que se encuentra en la torre del *World Trade Center* (WTC) de la Ciudad de México. El restaurante cuenta con una parte giratoria de 1 044 m^2, que es el área exterior donde se encuentran las mesas, la cual da una vuelta completa en una hora con cuarenta y cinco minutos; el resto del restaurante, es decir, la parte central, permanece fija. El diámetro total del restaurante es de aproximadamente 46 m.
   a) ¿Cual es el área total del restaurante?
   b) ¿Qué radio tiene la zona central?
   c) ¿Qué ancho tiene la corona que corresponde a la zona giratoria?
   d) Describe los procedimientos realizados en cada caso.

Piensa y sé crítico

La figura representa el Yin y el Yang, que son conceptos pertenecientes a la filosofía china. Éstos representan la armonía debido al equilibrio de la interacción de dos energías. El significado de los términos Yin y Yang no se conocen con exactitud, pero se considera que el Yin suele representar lo oscuro, la parte norte o nubosa de una montaña, una energía negativa o pasiva, mientras que el Yang representa el lado sur, la parte soleada de la misma montaña, una energía activa o positiva.

Si pintaras este símbolo en una pared, con el diámetro del círculo igual a 30 cm, ¿cuántos cm^2 pintarías de color negro, incluido el círculo pequeño? ¿A qué porción del área total del círculo equivale este color?



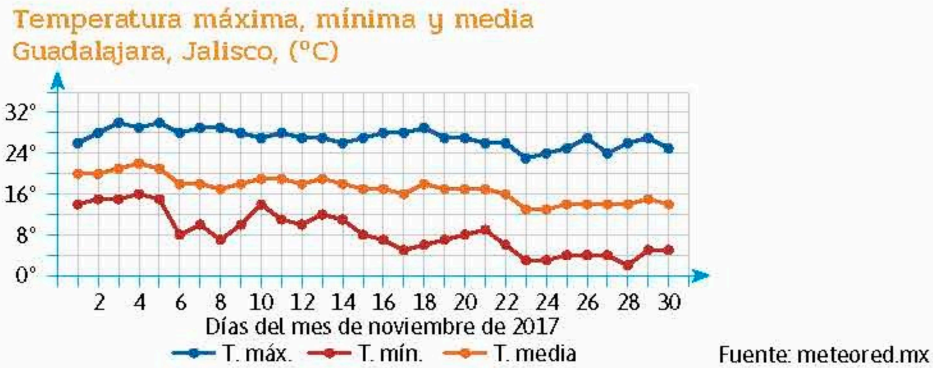
S18 Medidas de tendencia central, rango y desviación media

Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos, y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

L1 Medidas de tendencia central

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
En la gráfica se muestran las temperaturas máxima, mínima y media diarias en la ciudad de Guadalajara, durante noviembre 2017, de acuerdo con los reportes del Servicio Meteorológico Nacional.



a) Construye una tabla en la que registres los datos de la gráfica.
b) ¿Qué significa la temperatura media? Explica cómo se obtiene.
c) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de las temperaturas máximas. Determina cuál de ellas describe mejor estas temperaturas.
d) Realiza lo mismo para las temperaturas mínimas y medias.
e) A partir de esta información, describe cómo fue la temperatura en Guadalajara durante noviembre.
f) ¿Qué información fue relevante para responder y cuál no?
g) Describe tu procedimiento para calcular las medidas de tendencia central.

2. Reúnanse en equipo. Revisen sus resultados y, de haber diferencias, comparen procedimientos.

Desarrollo

Recolección y registro de datos

Recordemos el significado y los procedimientos para obtener medidas de tendencia central, la obtención de datos y su registro.

1. Reúnanse en equipos. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder.
   a) Pónganse de acuerdo y escriban una definición de familia directa. ____________________
   ____
   b) De acuerdo con esa definición, escriban el número de integrantes de las familias directas de cada uno de ustedes. ____________________

Infomáticas

El Observatorio Meteorológico y Astronómico de México, antecedente del Servicio Meteorológico Nacional, se instaló en 1877, en la azotea del Palacio Nacional.

c) ¿Los datos que registraron son numéricos, categóricos, enteros o pueden ser cero? Argumenten. ____

____

d) ¿Qué herramientas utilizarían para presentar los datos obtenidos? Expliquen.

____

____

e) ¿Para qué situaciones les puede convenir el saber el número de integrantes de sus familias? ____

____

____

2. Pregunten al resto de sus compañeros de grupo el número de integrantes de su familia directa y completen la tabla 2.41.

a) ¿De qué manera la organización de los datos en la tabla les ayuda en su análisis?

____

____

____

b) Expliquen su procedimiento para obtener los porcentajes correspondientes. ______________________________

____

____

____

c) Escriban otras situaciones en las que se requieran obtener datos numéricos a partir de encuestas o experimentos. ______________________________

____

____

Tabla 2.41. Registro de integrantes

Número de integrantes en la familia	Frecuencia absoluta	Porcentaje
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10 o más		
Total		

d) Reúnanse con otros equipos. Interpreten los casos en los que se realizan encuestas o experimentos para recabar datos cuantitativos y expliquen la utilidad de las tablas para registrarlos. Validen sus respuestas y corrijan si es necesario.

Para obtener datos a partir de una encuesta o experimento, se deben seguir estos pasos:

- Todos los posibles resultados son conocidos antes de realizar el experimento.
- El resultado exacto en cualquier ejecución del experimento no es predecible.
- El experimento puede realizarse en condiciones casi idénticas.
- Existe un patrón predecible a lo largo de muchas ejecuciones, lo que se conoce como regularidad estadística.

Uso e interpretación de medidas de tendencia central

Usaremos las medidas de tendencia central y su cálculo para determinar cuál o cuáles de ellas describen y analizan mejor un conjunto de datos.

3. Reúnanse en equipos. Lean la siguiente información y respondan lo siguiente.

La **media aritmética** $\bar{x}$ de un conjunto de datos, también conocida como promedio, se calcula sumando los datos y dividiendo el resultado entre el número de ellos. Es decir, si n es el número de datos, x1, x2, ..., xn son los datos, la operación es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

La **mediana** se ubica en medio de los datos ordenados de forma ascendente (menor a mayor), si es un número impar de datos. En el caso de que sea un número par, tomamos los dos de en medio y realizamos un promedio entre ellos.

La **moda** indica el dato (o los datos) con la mayor frecuencia en la muestra.

a) ¿Qué características tienen los datos que se describen mejor con la media aritmética? ____________________

b) ¿Cómo son los datos que se describen mejor con la mediana? ____________________

____

c) Explica las características de los datos que se pueden describir de manera adecuada por la moda. ____________________

____

d) Un dato atípico es el que se encuentra muy alejado del resto del conjunto. ¿Cuáles medidas de tendencia central se afectan si aparecen datos atípicos? ____________________

____

e) Con los datos de la tabla 2.41, calcula las medidas de tendencia central, señalando el procedimiento para determinar cada una.

- Media aritmética. ____________________
- Mediana. ____________________
- Moda. ____________________

f) ¿Cuál de ellas describe de manera más adecuada los datos de la tabla? ¿Por qué? ____________________

____

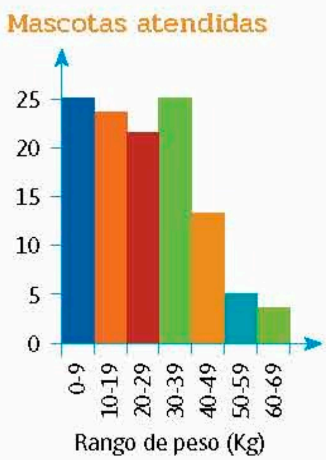


Figura 2.23

4. Analiza la situación y responde lo que se pide.
Una clínica veterinaria ha graficado los datos referentes al peso en kilogramos de los diferentes animales que atiende durante un mes (figura 2.23), y a partir de esta se quiere saber la medida de tendencia central que describe mejor el grupo de animales.

a) Calcula los valores de las medidas de tendencia central. ____________________

b) ¿Qué dificultad encontraste para calcular las medidas de tendencia central a partir de esta gráfica? ______

c) ¿Estas mismas dificultades aplicarían para cualquier gráfica? Explica. ______

______

d) ¿Cuál o cuáles de las medidas de tendencia central describen mejor los datos de la gráfica? Expliquen. ______

______

5. Analiza la situación. Responde lo que se te pide.
En la liga mexicana de futbol, mejor conocida como Liga MX, el equipo Monterrey fue el que más goles anotó en la fase regular del torneo Clausura 2018. La tabla 2.42 muestra los goles que anotó en cada jornada del torneo.

Tabla 2.42. Registro de goles del equipo Monterrey

Jornada	Goles	Jornada	Goles
1	1	10	1
2	2	11	2
3	0	12	3
4	2	13	2
5	5	14	2
6	1	15	0
7	2	16	4
8	0	17	2
9	1		

a) ¿Cuántos goles anotó en total el equipo en el torneo?

______

b) ¿Cuál fue la cantidad de goles que anotó más veces por partido? ¿A qué medida de tendencia central representa? ______

c) ¿Cuál es el valor de la mediana de goles por partido?

______

d) Calcula el valor de la media aritmética. ______

e) ¿Cuáles de las tres medidas son las que representan mejor la tendencia de goles por cada partido? Explica. ______

______

f) Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados y procedimientos para determinar la utilidad de las medidas de tendencia central al analizar un conjunto de datos.

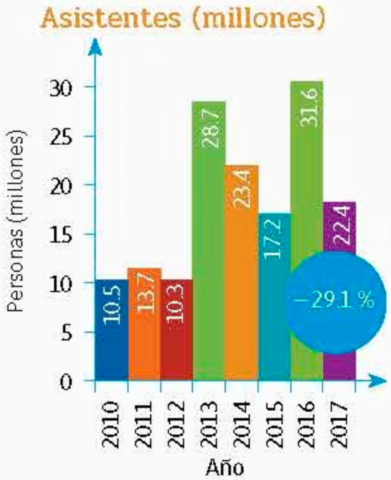
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Se preguntó a 25 personas sobre su salario mensual, obteniendo las siguientes respuestas:
   $3 500, $7 000, $8 000, $5 000, $0, $12 000, $10 000, $7 500, $8 000, $4 000, $27 000, $8 000, $0, $7 500, $2 000, $0, $10 000, $15 000, $5 000, $10 000, $0, $8 000, $8 000, $3 000, $1 0000.
   a) ¿Existen valores atípicos en la muestra? ¿Cuáles son?
   b) Registra en una tabla los datos y sus frecuencias.
   c) ¿Cuáles son los valores de la media aritmética, la mediana y la moda?
   d) ¿Cuáles de ellos describen mejor los datos? ¿Por qué?

L2 Rango y dispersión de datos

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
   La gráfica siguiente muestra los millones de personas que asistieron a los cines del país a ver películas producidas en México entre los años 2010 y 2017, de acuerdo con el reporte elaborado por la Cámara Nacional de la Industria Cinematográfica (Canacine).
   a) ¿Qué consideras que significa –29.1 % que aparece en las dos últimas barras de la gráfica?



   b) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda. Determina cuál de ellas describe mejor los datos de la gráfica.
   c) Escribe los valores máximo y mínimo registrados y encuentra el rango de los datos. ¿Qué operación realizaste para obtenerlo?
   d) Describe qué tan dispersos están los datos de acuerdo con el resultado del inciso anterior.
   e) ¿Qué información fue relevante para responder y cuál no?
   f) Describe tu procedimiento para determinar qué información sobre los datos te da cada medida de tendencia central y el rango.
2. Reúnanse en equipo. Analicen, por medio de la validación de sus respuestas, la utilidad del rango para describir un conjunto de datos. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Cálculo del rango y relación con las medidas de tendencia central

Recordemos el cálculo del rango de un conjunto de datos y su utilidad para describir el comportamiento de ese mismo conjunto en relación con la media aritmética, la mediana y la moda.

Infomáticas

Al final del año 2017, México ocupaba el cuarto lugar del mundo en salas de cine en operación, con 6 742.

1. Reúnanse en equipos. Convengan la estrategia y los procedimientos para responder.
   a) Escriban los valores de sus estaturas. ______________________
   b) Encuentren y escriban el rango de los datos. ¿Cómo lo obtuvieron? ______________________
   ____
   c) ¿Qué indica el rango sobre la dispersión de las estaturas en el equipo? Expliquen.
   ____
   d) Obtengan la media aritmética, la mediana y la moda de los datos. ______________________
   ____
   e) ¿Cuáles de las medidas obtenidas describen mejor las estaturas del equipo? Expliquen. ______________________
   ____
   ____
2. Vayan con otro equipo y registren los datos de sus estaturas. ______________________
   ____
   ____

a) Calculen los siguientes valores de este nuevo conjunto de datos.

- Media aritmética: ______________
- Mediana: ______________
- Moda: ______________
- Rango: ______________

b) ¿Cuáles de las medidas calculadas representan mejor al conjunto de estaturas de este segundo equipo? Expliquen. ______________

c) ¿Hubo medidas que fueron iguales en los conjuntos de estaturas de los equipos? ¿Cuáles? ______________

d) Marquen las estaturas y las medidas de tendencia central de cada equipo en las rectas numéricas de la figura 2.23.

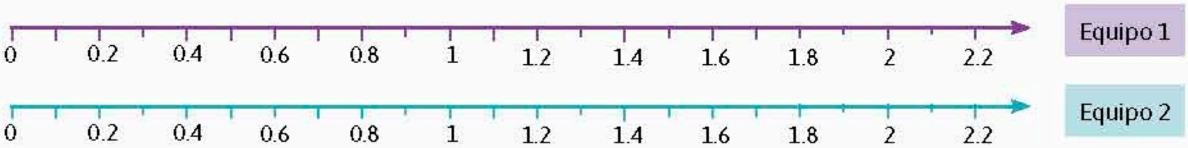


Figura 2.23. Rectas numéricas para marcar los datos.

e) De acuerdo con lo que observan, ¿cuál de los equipos tiene estaturas más cercanas entre sí? Expliquen. ______________

f) Expliquen cómo se obtiene el rango de un conjunto de datos, su relación con las medidas de tendencia central y por qué es una medida de dispersión de los datos.

____

g) Reúnanse con otros equipos. Verifiquen sus respuestas sobre el rango de un conjunto de datos. Argumenten y corrijan si es necesario.

El **rango** de un conjunto de datos se obtiene restando el valor mínimo del máximo de los datos. Por ello, se le considera una medida de dispersión, pues indica qué tan alejados están entre sí los extremos del conjunto de datos.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. La gráfica muestra las temperaturas máximas y mínimas aproximadas por día en la ciudad de Nueva York durante enero de 2018.
   a) Calcula los rangos de las temperaturas máximas y mínimas.
   b) ¿Se obtuvieron los mismos valores de rangos en ambos casos? ¿Qué significa este hecho respecto a las temperaturas?

L3 Desviación media

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.
Al cierre de la lección 1 de la secuencia 9, preguntaste a tus compañeros sobre los minutos que tardaban para ir de su casa a la escuela y realizaste un histograma para describir los tiempos.

Tiempo en que tardan en llegar a la escuela (min)

25	15	15	40	15	20
12	25	15	30	30	15
15	30	10	5	15	15
10	20	15	20	10	20
15	15	50	30	40	60

a) Pregunta de nuevo a tus compañeros los minutos que tardaron hoy en llegar a la escuela y regístralos en una tabla.
b) Calcula la media aritmética, la mediana, la moda y el rango de los dos conjuntos de datos.
c) ¿Qué conjunto de datos consideras que es más disperso? Explica.
d) ¿Cuáles medidas de tendencia central describen mejor a cada conjunto de datos? Explica.
e) Describe cómo ayuda el rango de los datos a determinar cuál de las medidas fue más adecuada, así como para explicar la dispersión de los minutos.
f) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
g) Describe tu procedimiento para calcular las medidas y describir los datos.

2. Reúnanse en equipo. Verifiquen sus respuestas e interpreten el significado de las medidas en las situaciones, así como su utilidad. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Cálculo de la desviación media

Definamos lo que es la desviación media de un conjunto de datos y cómo se calcula.

1. Reúnanse en equipos. Lean la situación y las actividades siguientes, acuerden la estrategia y procedimientos para responder.

El juego de la rayuela consiste en lanzar monedas a una línea marcada en el suelo; a veces se puede usar el rebote en una pared. Gana quien tenga su moneda más cerca de la línea (figura 2.24). Eduardo y Martín jugaron rayuela, luego registraron y ordenaron de menor a mayor las distancias en centímetros a las que cayeron sus monedas línea. Cada uno obtuvo los siguientes resultados.
Eduardo: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Martín: 0, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 10

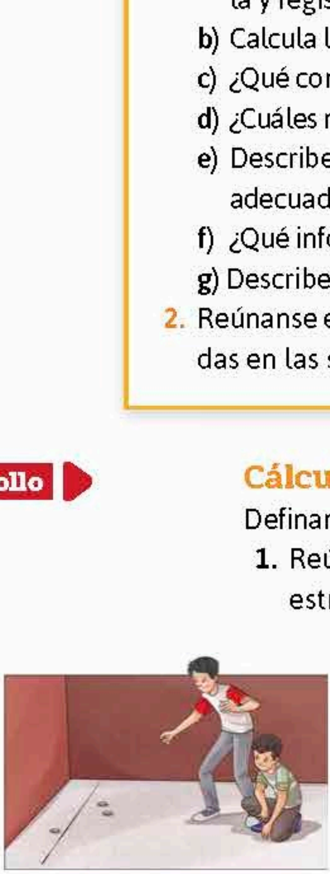


Figura 2.24. Juego de rayuela.

Infomáticas

En otros países, rayuela es un juego que en nuestro país se le conoce como avión o bebeleche.

a) ¿Qué significa el 0 que aparece en ambas listas? ____________________
b) ¿Qué significan los tres números 5? ____________________
____
c) ¿Qué quieren decir los dos números 3 en los lanzamientos de Martín? ____________________
____
d) En la figura 2.25a, de la página 203, dibujen las monedas que lanzó Eduardo, y en la figura 2.25b las que lanzó Martín.

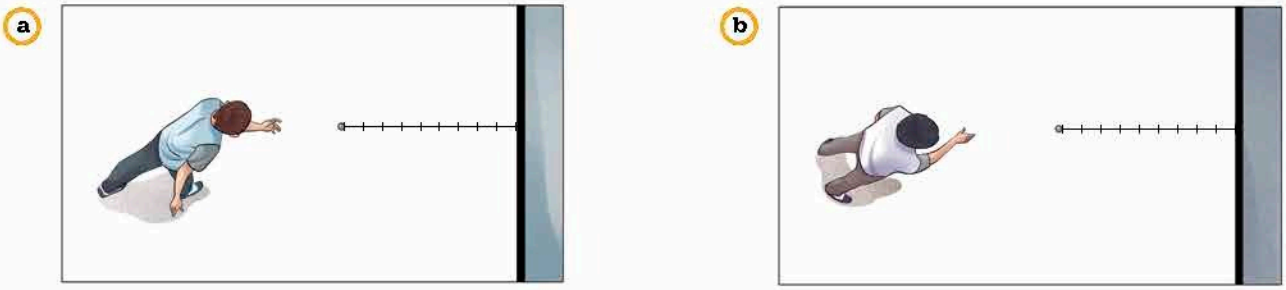


Figura 2.25. Distribución de los lanzamientos de Eduardo (a) y Martín (b).

e) ¿En qué son distintos los dos grupos de datos? ______________________

f) ¿Quién tuvo mejores resultados? Expliquen. ______________________

2. Completa la tabla 2.43 con los valores de la media aritmética, mediana, moda y rango de los lanzamientos.

Tabla 2.43. Valores en lanzamientos

	Media aritmética	Mediana	Moda	Rango
Eduardo				
Martín				

a) ¿Cuáles de las medidas describen de manera adecuada los conjuntos de datos? Expliquen. ______________________

b) ¿Existen medidas que son iguales en ambos conjuntos? ¿Cuáles? ______________________

c) Tracen en las imágenes anteriores una línea vertical de un color distinto que represente la media aritmética. ¿Con cuántas monedas coincide? ______________________

d) ¿Qué tan alejados están los datos de la media aritmética en los lanzamientos de Eduardo? ______________________

e) ¿Qué tanto lo están en el conjunto de lanzamientos de Martín? ______________________

3. Reunidos en equipos, realicen lo que se les pide.

a) Midan la distancia de cada moneda a la línea de la media aritmética en la figura de los lanzamientos de Eduardo y completen la tabla 2.44.

Tabla 2.44. Lanzamientos de Eduardo

Datos													
Distancia a la media aritmética													

b) Realicen el mismo cálculo para los lanzamientos de Martín y completen la tabla 2.45.

Tabla 2.45. Lanzamientos de Martín													
Datos													
Distancia a la media aritmética													

c) ¿Para cuál de los conjuntos consideran que las distancias son mayores entre los datos? ____________________

____

d) ¿Se pueden considerar distancias negativas? Expliquen. ____________________

____

e) Calculen el promedio de las distancias a la media aritmética para los lanzamientos de ambas personas.

Eduardo: ____________

Martín: ____________

f) ¿Qué información proporcionan estos valores sobre la dispersión de los lanzamientos de ambos? ____________________

____

g) De acuerdo con sus procedimientos y resultados, respondan lo siguiente.

- Teniendo en cuenta las medias aritméticas de Martín y Eduardo, ¿quién lanzó mejor sus monedas? ¿Por qué? ____________________

  ____

- Tomando como base el rango de los tiros de Eduardo y Martín, ¿quién de los dos tiró mejor? Expliquen. ____________________

  ____

- De acuerdo con los datos de las distancias a las medias aritméticas de Martín y Eduardo, ¿quién es el mejor tirador? Argumenten. ____________________

  ____

  ____

4. Antes, cuando no se empleaba la tecnología en competencias para medir el tiempo de los nadadores, dos jueces lo cronometraban a mano. El tiempo oficial de cada nadador era el promedio de lo que habían medido esos jueces.
En equipos, repliquen una situación similar: tomen una distancia fija para que uno de ustedes la corra. Al menos otros tres de ustedes tomen el tiempo que se necesita para recorrerla.

a) Escriban los tiempos. ____________________

b) Calculen los valores de la media aritmética y el rango. ____________________

c) ¿Qué observan de los datos respecto a las medidas calculadas? ______________________

____

d) Obtengan las diferencias de cada tiempo a la media aritmética, es decir, resten cada tiempo al valor de la media aritmética. ______________________

____

e) ¿Es posible que existan tiempos negativos? Expliquen. ______________________

____

- Si sucede, usaremos el valor absoluto (| |), a fin de obtener la distancia de cada dato a la media aritmética.

f) Calculen el promedio de las diferencias a la media aritmética. ______________________

g) ¿Qué tan precisas fueron las mediciones de los tiempos que hicieron? Argumenten.

____

h) Describan un procedimiento por el cual se obtiene la desviación media de un conjunto de datos. ______________________

i) Reúnanse con otros equipos. Razonen sobre los procedimientos descritos para obtener la desviación media de un conjunto de datos al validar sus respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Notación

El valor absoluto de número a, denotado por $|a|$, siempre es un número positivo o cero. Es a si a es positivo, $-a$ si a es negativo y 0 si a es cero.

La **desviación media**, simbolizada como D_M, de un conjunto de datos, es el promedio de las distancias de los datos a la media aritmética. Es una manera de ver qué tan lejos de la media aritmética están los datos de una muestra, por lo que es una medida de dispersión. Si los datos son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con media aritmética $\overline{x}$, la desviación media se obtiene mediante la expresión:

$$D_M = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

con $|x_n - \overline{x}|$ el valor absoluto de las diferencias de cada dato a la media aritmética.

Conoce más

Para ver otros ejemplos del cálculo de la desviación media, entra a la página: http://www.edutics.mx/U8Y. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Problemas de cálculo de la desviación media

Apliquemos lo aprendido sobre el cálculo de la desviación media y su relación con las otras medidas de tendencia central y de dispersión.

5. Reúnanse en equipo y analicen la situación.
En la página de internet de la Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad (Conabio) se encuentran mapas que marcan regiones donde se han observado ciertas especies de animales o plantas. En el mapa de la figura 2.26 hay uno de la identificación del puerco espín tropical, en el que cada punto significa que se ha observado esa especie en dicho lugar.

Puerco espín tropical. Distribución conocida

Figura 2.26. Registro de las observaciones de puerco espines en México. (Fuente: Conabio).

a) De acuerdo con el mapa, ¿pueden considerar al puerco espín como una especie en peligro de extinción? Expliquen. ______

______

b) ¿De qué manera las medidas de tendencia central ayudan a responder la pregunta anterior? ______

c) ¿Cómo contribuyen el cálculo del rango y la desviación media a responder la pregunta del inciso a)? ______

d) Obtengan la siguiente información.

- El número de estados donde se ha visto al puerco espín. ______
- El número de observaciones por estado. ______
- Los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión, tomando como total el número de estados donde se ha observado al puerco espín.

______

- Los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión, tomando como total los 32 estados de la república mexicana. ______

______

e) ¿Cuáles medidas de tendencia central y de dispersión se afectan al cambiar el total de estados? Expliquen. ______

______

f) Después de realizar los cálculos, ¿se modifica o se reafirma la respuesta dada en el inciso a)? Argumenten. ______

______

Tabla 2.46. Registro de calificaciones

Calificación	Alumnos	Porcentaje
5	11	
6	16	
7	15	
8	22	
9	14	
10	3	
Total		

6. De manera individual, completa la tabla 2.46, que muestra las calificaciones de la evaluación más reciente de un grupo de secundaria.

a) Calcula las medidas de tendencia central

Media aritmética: ______

Mediana: ______

Moda: ______

b) Obtén los valores de las medidas de dispersión

Rango: ______

Desviación media: ______

c) ¿Cómo consideras el desempeño del grupo en la evaluación?

______

Figura 2.27. Gráfica de saltos de práctica de un atleta.

7. Un atleta de salto de longitud registra las longitudes que alcanza en cada salto de práctica, dadas en pies. Éstas se muestran en la gráfica de la figura 2.27.

a) ¿Cuáles son los valores de las medidas de tendencia central? ______

______

b) ¿Cuáles son los valores del rango y de la desviación media? ________________

c) Describe el rendimiento del atleta. ________________

8. La Norma Oficial Mexicana establece que un alimento etiquetado como yogur debe tener un mínimo de 8.25 % de sólidos lácteos no grasos. Para comprobar que se está cumpliendo la norma, el departamento de calidad de una empresa elige algunos productos al azar y los analizan.

a) Se revisaron diez productos, los cuales tenían en promedio 9% de sólidos lácteos no grasos, con una desviación media de 1 %. ¿Hubo productos que no cumplieron la norma? Explica la razón. ________________

b) Otro lote observado de 10 productos tuvo 10 % de sólidos lácteos no grasos en promedio. ¿Qué tan grande puede ser la desviación media para garantizar que todos los yogures estaban dentro de la norma? Explica tu procedimiento. ________________

c) Si la desviación media es mayor a 2 % para este segundo lote, ¿qué puedes decir de los yogures observados respecto a la norma oficial, y por qué? ________________

d) Reúnanse en equipo. Calculen las medidas de tendencia central, el rango y la dispersión media a fin de verificar los resultados. Argumenten y corrijan si es necesario.

Infomáticas

La Norma Oficial Mexicana NOM-181-SCFI-2010 establece las regulaciones sobre el yogur.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Un laboratorio afirma que uno de sus medicamentos tiene 5 mg de cierta sustancia activa. Se revisan 100 muestras del medicamento. La media aritmética de los datos observados es de 5.0005 mg y la desviación media es de 0.0004 mg.
   a) ¿Puede haber medicinas que tengan menos de 5 mg de sustancia? Explica.
   b) Si se hace una regla basada en la desviación media y se pide que el promedio esté entre 4.99999 y 5.00001, ¿cuál debe ser el criterio de la desviación media para que todas las medicinas tengan al menos 4.99998 de sustancia activa? Describe tus procedimientos para determinarlo.

Portafolio

¿Puede haber desviaciones respecto a la mediana y a la moda? ¿Cómo las obtienes? Organiza una discusión grupal y escriban un documento con sus conclusiones.

Piensa y sé crítico

Dicen que si tienes un grupo de datos, la suma de las distancias a la media de los puntos mayores que la media aritmética es igual a la suma de las distancias de los que son menores a esta misma medida.

a) Comprueba si es cierto para los datos: 1, 2, 5, 5, 6, 6, 7, 9, 12, 15, 33, 42.

b) ¿De qué manera la desviación media te permite comprobar la hipótesis? Discute con tus compañeros al respecto.

Lo que aprendí

1. Explica con tus palabras los siguientes conceptos o procedimientos. Compara tus anotaciones con las de tus compañeros y, junto con tu profesor, verifiquen que sean correctas.

Concepto	Mi explicación	Ejemplo
Relación de proporcionalidad directa	Los cocientes de las cantidades que se corresponden son constantes y es la constante de proporcionalidad.	$\frac{14}{34} = \frac{28}{35} = \frac{21}{51} = \frac{7}{17}$, por lo que este último es la constante de proporcionalidad.
Relación de proporcionalidad inversa		
Reparto proporcional directo		
Reparto proporcional inverso		
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas		
Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, método de sustitución		
Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, método de igualación		
Proporcionalidad inversa, expresión y gráfica		
Área de un polígono regular		
Área del círculo		
Desviación media y su cálculo		

2. Romeo le regaló a su novia, el día de sus quince años, 20 rosas y le cobraron \$50.00. Pablo compró por el mismo precio 15 rosas para Nayhelli, hermana mayor de la quinceañera.

¿Cuánto pagó por cada rosa? ______________________________

3. Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método que consideres adecuado.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \quad\; y = x - 1 \end{cases}$$

4. Traza en el espacio la gráfica de la relación proporcional inversa $y = \frac{1}{2x}$.

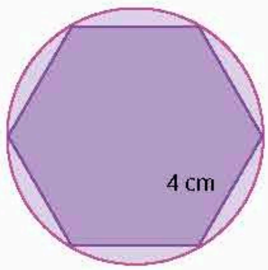
5. Una señora reparte sus tierras entre sus nietos en partes directamente proporcionales a sus edades. Las edades de los nietos son 9, 15 y 21 años. Al menor le corresponden 16 hectáreas.

a) ¿Cuál es el número total de hectáreas que ha repartido entre sus nietos? ______________

b) ¿Cuántas recibirán los otros dos nietos? ______________________________

____

6. Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia, como se observa en la figura. Encuentra el área del círculo. ______________________________



7. Un jugador de basquetbol anotó los siguientes puntos en sus últimos partidos: 15, 42, 27, 44, 27, 46, 35.

a) ¿Cuál es valor de las medidas de tendencia central? ______________________

____

b) ¿De cuánto es el rango? ______________________________

c) ¿Cuánto vale la desviación media de los puntos anotados? ______________________

8. Compara tus respuestas de toda la sección con las de tus compañeros. ¿Son correctas? ¿Tuvieron dificultades para responder o ejemplificar algún contenido? Compartan sus experiencias, argumenten sus respuestas y expliquen sus ejemplos. Repasen los contenidos que consideren necesario.

Un problema de variación inversa

1. Lee lo siguiente.

En ocasiones las circunstancias de la vida nos hacen sentir desanimados y pensamos erróneamente que no tenemos la capacidad de superar nuestros problemas o lograr lo que queremos, por lo que evitamos tareas en las que posiblemente podríamos tener éxito. Reflexiona sobre el siguiente caso:

La autoeficacia es la creencia en las propias capacidades para hacer frente a diversas situaciones.

Ignacio es contratista y le han pedido que pinte un edificio en 5 días. Le ofrecieron pagarle $60 000.00 más un bono extra de 40 % debido a la premura del trabajo. Él sabe que a un trabajador suele tomarle 30 días de trabajo de 8 h para pintar un edificio como ese. Aunque quiere el bono extra, siente que es una tarea muy difícil (si no es que imposible) y piensa en dejar ir la oportunidad por temor a fallar, ¿qué piensas que debería hacer el señor Ignacio? ¿Crees que es posible realizar la entrega? ¿Cómo? ¿Contratará más trabajadores? ¿Cuánto pagará a cada uno? ¿Cuánto ganará Ignacio?

Autoeficacia

Refiere a la confianza que tienes en ti mismo/a para lograr lo que te propones o solucionar un problema. Si tratas de confiar en ti (aunque la tarea parezca compleja), te será más fácil participar, comprometerte y recuperarte de las decepciones o contratiempos, al igual que tendrás éxito con mayor probabilidad. Por otro lado, si desconfías de ti, la tarea se te hará más difícil, te centrarás en los errores y probablemente te rendirás con facilidad.

Una estrategia

Para tener una buena autoeficacia debes preocuparte menos de tus carencias y las cosas que pueden salir mal y concéntrate más en lo positivo y cómo puedes organizarte para lograr lo que te has propuesto. Primero, analiza tu meta y cómo puedes lograrla (qué tienes y qué necesitas). Después, pon manos a la obra y mantén una actitud positiva (si se presenta un problema considéralo sólo como un obstáculo). Finalmente, felicítate por tus logros (aunque parezcan pequeños) y reflexiona acerca de todo el proceso. Verás que tienes la capacidad de hacer frente a cualquier circunstancia con entusiasmo.

2. Reúnanse en equipo. Propongan una solución a Ignacio.

a) Analicen el problema y propongan una meta. Elaboren un plan de trabajo: identifiquen los datos que ya tienen, los que necesitan y cómo los obtendrán.

b) Realicen lo que planearon. Recuerden mantener una actitud positiva. Si encuentran alguna dificultad, céntrense en las soluciones y no en el problema.

c) Cerciórense que su solución funciona y rectifiquen si es necesario. Felicítense por el gran trabajo que han hecho.

d) ¿El problema de Ignacio tuvo solución? ¿Cuál fue? ¿Creen que Ignacio tuvo razón para preocuparse tanto? ¿Qué le dirían?

Nombre: ______________________ **Fecha:** ________ **Grupo:** ________

Subraya la opción correcta.

1. Un supermercado oferta dos paquetes de arroz como los de la figura por $36.00. Una cocina económica ofrecerá arroz con tomate y para eso necesita 17 kilogramos. ¿Cuánto pagará por el arroz que necesita?

   a) $36.00 c) $72.00
   b) $306.00 d) $612.00

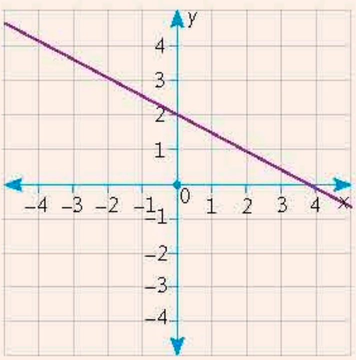
2. Tres carpinteros construyen una mesa en 15 días. ¿Cuántos días tardarán 6 carpinteros en construir 2 mesas similares?
   a) 6 días c) 15 días
   b) $7\frac{1}{2}$ días d) $18\frac{1}{3}$ días

3. Pedro y Pablo compraron entre los dos un boleto de lotería que resultó ganador. Pedro puso $60.00 y Pablo $40.00. Si se reparten proporcionalmente el premio de $2 500.00, ¿cuánto dinero le corresponde a Pedro?
   a) $1 500.00 c) $1 700.00
   b) $1 000.00 d) $2 000.00

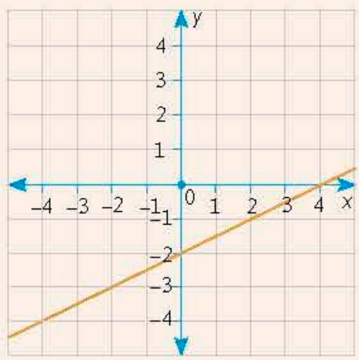
4. Sofía compró tres cuadernos y una memoria USB. Pagó con un billete de $500.00 y le devolvieron $256.00. Si el precio de la memoria USB fue de $142.00, ¿cuál fue el precio de cada cuaderno?
   a) $34.00 c) $42.00
   b) $48.00 d) $54.00

5. La recta que representa una relación proporcional es

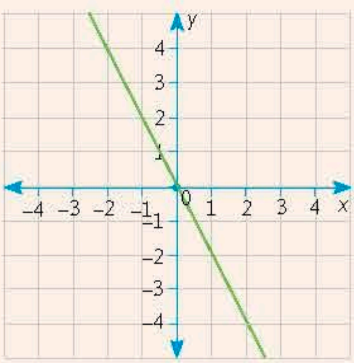
a)



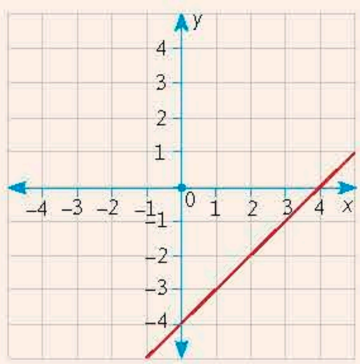
c)



b)



d)



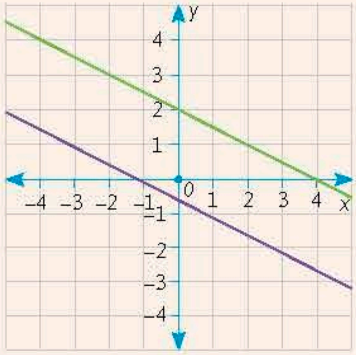
6. ¿Qué sistema de ecuaciones representa a las dos rectas de la gráfica?

a) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

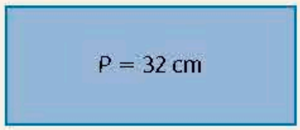


7. La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ es

a) $x = 3, y = 2$
b) $x = -2, y = -3$
c) $x = -2, y = -2$
d) $x = 1, y = 1$

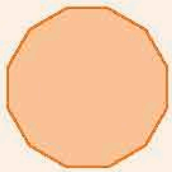
8. Se tiene un rectángulo con perímetro indicado en la figura. Si su base mide 6 cm más que su altura, ¿cuál es la medida de esta última?

a) 6 cm
b) 8 cm
c) 10 cm
d) 12 cm



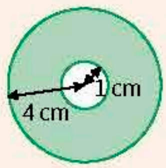
9. Un adorno con la forma del polígono regular de la figura tiene un apotema de 9.33 cm y 5 cm de lado. ¿Cuánto es su área?

a) 559.8 cm^2
b) 442.6 cm^2
c) 126.4 cm^2
d) 279.9 cm^2



10. El área que ocupa un disco como el que se muestra en la figura es

a) 28.26cm^2
b) 47.10 cm^2
c) 18.84 cm^2
d) 50.20cm^2



11. Las tallas de zapatos de 10 personas son 28, 27, 27, 26, 25, 27, 30, 28, 27, 25. La mediana, el rango y la desviación media de los datos son, respectivamente,

a) 26, 1, 5
b) 26, 5, 1
c) 27, 1, 5
d) 27, 5, 1

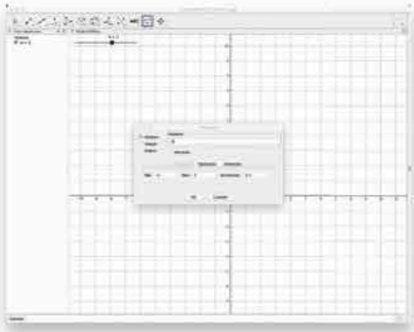
Reflexiono sobre mi desempeño

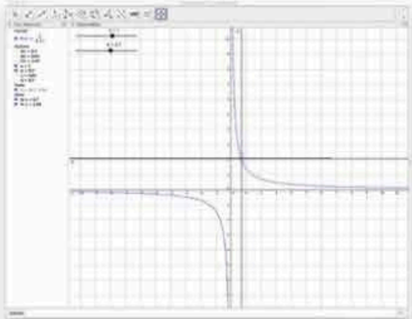
Coevaluación. Reúnete con un compañero para compartir y validar sus respuestas.

Heteroevaluación. Guiados por su maestro, revisen las secuencias que estudiaron en la unidad para identificar cuáles temas comprendieron mejor, y en cuáles tuvieron dificultades. Propongan una estrategia de trabajo para favorecer su aprendizaje.

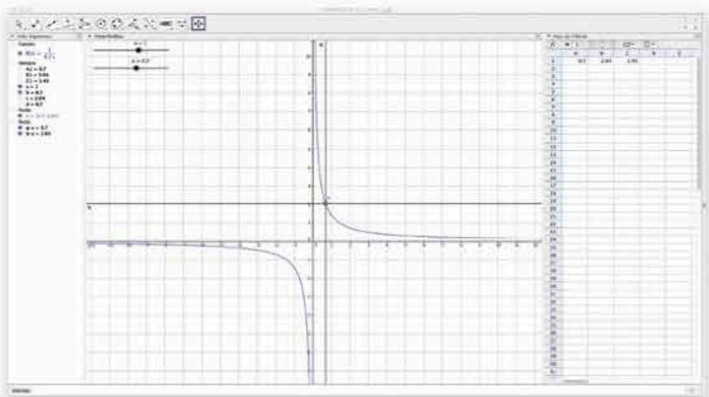
Variación inversa

En esta actividad volveremos a trabajar con el programa de geometría dinámica Geogebra para analizar situaciones de variación inversa.





1. Abre el programa. En el menú principal, hasta arriba, selecciona *Vista* y verifica que las opciones *Vista algebraica* y *Vista gráfica* estén activadas.
2. Selecciona el icono *Deslizador* y genera dos parámetros: *a* y *b*, define los intervalos desde 0 hasta el número que quieras. Comprueba que en la *Vista algebraica* (panel izquierdo) aparecen los parámetros.
3. En el renglón de entrada (parte inferior de la ventana) escribe la forma general de una relación lineal inversa: $y = \frac{a}{cx}$. En cuanto pulses *Intro* (Enter), se mostrará la representación gráfica de la variación correspondiente. Desliza los parámetros para que observes los cambios en la gráfica. Si deseas cambiar los intervalos, entra al menú *Edita* y selecciona *Propiedades*.
4. Marca un punto en la gráfica. En el renglón *Entrada* escribe "Distancia[A, EjeX]" y "Distancia[A, EjeY]", donde A es el nombre del punto sobre la gráfica. Después, con el icono *Recta* perpendicular, crea dos rectas de ese tipo a los ejes X y Y que pasen por A, seleccionando este punto y luego cada eje.
5. En el menú principal, selecciona *Vista*, luego *Hoja de cálculo*. En la celda A1 escribe "= c", en B1 "= d" y en D1 "= c*d", donde d y c son las distancias al eje X y Y respectivamente.
6. Selecciona el icono *Elige* y *Mueve* para cambiar la posición de A. ¿Qué sucede con el producto de los valores de c y d? ¿Qué representarían estas cantidades en una situación de variación inversa? Justifica tu respuesta.
7. Mueve los *deslizadores* y observa la gráficas. ¿Qué cambio notas? ¿Qué pasa con el producto de los valores de c y d? ¿Cuáles son las características de una gráfica correspondiente a una variación inversa?
8. Si no tienen acceso a la aplicación, tracen en su cuaderno una gráfica de una relación inversa. Midan la distancia de un punto sobre la gráfica a los ejes X y Y. Luego obtengan el producto de estas distancias. Hagan esto mismo con otros puntos sobre la gráfica. Analicen las características de la gráfica de una variación inversa. Comparen sus resultados. Anoten sus conclusiones en su cuaderno.



El cubismo es un movimiento que busca romper con el arte tradicional. Se basa en la desaparición de un punto de vista único para representar un objeto visto desde múltiples ángulos al mismo tiempo (de frente y perfil, por ejemplo). Como resultado de este proceso las formas llegan a reducirse a un conjunto de figuras geométricas fundamentales como prismas, cilindros y esferas. La escultura muestra una silueta humana, ¿puedes identificar qué figuras parecen componerla?

U3

Miguel Guía, Escultura Arlequín cubista en madera, Colección privada.

Me preparo

Equivalencia de expresiones de primer grado a partir de sucesiones

1. Se acomodan palillos de tal manera que se obtiene la sucesión de figuras.

a) ¿Cuál es la diferencia entre el número de palillos de dos figuras consecutivas? ______________________

____

b) Completa la tabla.

Número de figura (n) o posición del término	1	2	3	4	5
Número de palillos que forman la figura o término					
Diferencia entre dos términos consecutivos					

c) Escribe una regla general que describa la sucesión. ______________

2. A partir de la sucesión: 6, 11, 16, 21, ..., contesta lo que se pide.

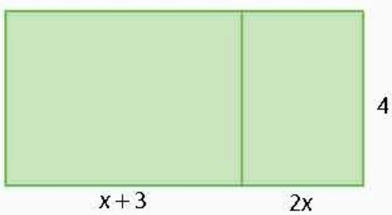
a) Subraya las reglas generales con las que se pueden obtener los términos de la sucesión. La letra n representa el lugar de cada término.

- $6 + 5(n - 1)$
- $5n + n$
- $5n + 1$
- $5n - 4 + 5$

b) Calcula el término 23 de la sucesión anterior. ______________

c) Simplifica las reglas. ¿A qué expresión llegaste en cada caso? ______________

Formulación y equivalencia de expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas (perímetro y área)



3. Se tiene un terreno rectangular como se muestra en la figura.

a) Escribe una expresión algebraica para obtener el área del terreno. ______________

____

b) Completa la tabla sustituyendo los valores de x en cada expresión.

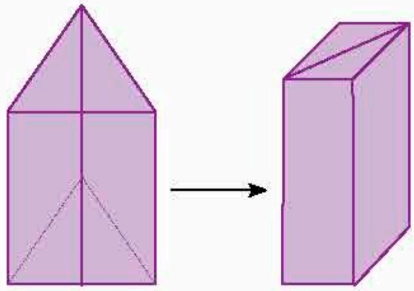
Expresión algebraica	Valores de x								
	1	2	3	4	5	6	10	28	41
$12x + 12$									
$4(3x + 3)$									
$4(x + 3) + 4(2x)$									

c) ¿Con cuáles expresiones algebraicas obtienes los mismos resultados? ¿Por qué piensas que pase esto? ______________

____

4. Se toma un bloque de madera cuya base es un triángulo equilátero, se corta por la altura y se reacomodan las piezas como indica la figura.

Volumen de prismas y cilindros rectos



a) ¿Cuál es la relación entre el área de las bases de los dos prismas? Explica. ___

b) ¿Qué relación hay entre la altura de ambos prismas? ___

c) ¿Cómo será el volumen de los dos prismas? ___

d) Si la altura del prisma es de 6 cm, el lado del triángulo vale 4 cm y su altura es de 3.46 cm, calcula el volumen del bloque de madera completo.

___

5. Una empresa fabricará barriles como los que se muestran en la figura con el fin de transportar residuos tóxicos a una planta química. Dibuja un diseño plano de un barril para su armado.

6. En un juego de mesa se utilizó un dado como el de la figura para avanzar las casillas del tablero. Los lanzamientos en el juego fueron: 5, 8, 3, 1, 6, 8, 2, 4, 6, 7, 4, 7, 6, 2, 1, 1, 5, 8, 4, 3.

Probabilidad teórica de un evento aleatorio

a) ¿Cuál fue el número que cayó más veces? ¿Cuántas veces salió? Escribe la probabilidad de obtenerlo de acuerdo con estos resultados. ___

b) ¿Cuántas caras del dado tienen escrito el número que salió más veces? ¿Cuántas caras tiene el dado? Escribe la probabilidad de obtener este número de acuerdo con las cantidades que has escrito. ___

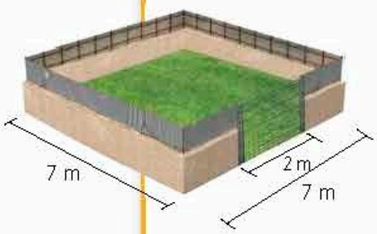
S19 Sucesiones y equivalencia de expresiones

Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

L1 Reglas aritméticas y equivalencias

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
Se quiere construir una barda alrededor de un terreno cuadrado y dejar un espacio en un lado para una reja.



a) ¿Qué longitud debe tener la barda?
b) Si las longitudes de los lados del terreno fueran de 11 m, ¿qué tan larga será la barda?
c) Y si las longitudes de los lados fueran de 39 m, ¿qué longitud tendría la barda?
d) Escribe una expresión general para calcular la longitud de la barda para cualquier medida de los lados del terreno.

2. Compara tu expresión con las siguientes y determina si alguna es equivalente a la tuya.

$4n-2 \qquad 4\left(n-\frac{1}{2}\right) \qquad 2n+4(n-1) \qquad 2n+2(n-1)$

3. Reúnanse en equipo. Conozcan los casos en que las expresiones algebraicas para describir las sucesiones son equivalentes. Argumenten o corrijan sus resultados en caso necesario.

Desarrollo

Reglas de sucesiones

Recordemos cómo obtener la regla de una sucesión.

1. Completa la tabla 3.1. Luego responde lo que se pide.

Notación
En una sucesión, *término* y *elemento* significan lo mismo.

Tabla 3.1

Posición del término	1	2	3	4	5			8	...
Término de la sucesión						−33	−42		
Diferencias									

a) ¿Cuál es el primer término de la sucesión? ___________
b) A partir del primer término, ¿cómo se obtiene el segundo? ___________
c) ¿Cómo se obtiene el tercer término de la sucesión a partir del primero? ___________
____
d) Analiza los resultados del renglón de las diferencias. ¿Qué observas? ___________
____
e) Escribe la regla general de la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión. ____

Notación
La regla de una sucesión es una expresión algebraica que permite calcular el valor de cada término.

f) Escribe el término que ocupa la posición 60. ______

- ¿Qué posición tiene el término –78? ______
- ¿Hay alguna posición en la que aparezca el número –138? ¿Cuál? ______

______

g) Compara la regla que obtuviste con la de tus compañeros. Si hay diferencias, argumenta tu respuesta y corrige si es necesario.

2. Completa las tablas 3.2 y 3.3 usando un procedimiento similar al anterior.

Tabla 3.2									
Posición del término	1	2	3	4					...
Término de la sucesión					8.8	10.2			...
Diferencias									
Regla general									

Tabla 3.3									
Posición del término	1	2	3	4					...
Término de la sucesión					$\frac{7}{3}$	$\frac{17}{6}$			...
Diferencias									
Regla general									

a) Reúnete en equipo. Perfeccionen sus técnicas para escribir las reglas generales de las sucesiones lineales mediante la revisión, argumentación y corrección de sus resultados.

Reglas equivalentes

Exploremos qué ocurre cuando dos o más expresiones algebraicas proporcionan los mismos valores. Consideraremos expresiones que se formulan con sucesiones.

Notación

Debido a que las sucesiones representan una relación de los números naturales, sus expresiones generales llevan la literal *n*.

3. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Completen la tabla 3.4.

Tabla 3.4									
Regla de la sucesión	**Algunos términos de la sucesión**								
	1	2	3	5	12	25	50	100	...
$21 - 9n$									...
$-3(3n - 7)$									...
$12 - 9(n - 1)$									...

a) Comparen los términos. ¿Qué observan? ______

b) ¿Por qué piensan que ocurra lo que observaron? Hagan una conjetura. ______

______

______

c) Reflexionen: en la segunda regla, ¿qué operación deben realizar con el -3 y los términos dentro del paréntesis? Y en la tercera regla ¿qué operación deben realizar con el término numérico y los términos dentro del paréntesis? No se olviden de la regla de los signos. En cada regla, ¿cuáles términos son semejantes? Hagan las operaciones necesarias y simplifiquen las dos últimas reglas.

____

d) Revisen su conjetura y modifíquenla, si es necesario, con base en sus observaciones.

____

e) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas y escriban una conclusión. ______________________________

____

4. Intercambien compañeros de equipo. Respondan lo que se pide.
Pablo hizo un programa de computadora que genera figuras con cuadrados. En la figura 3.1 se muestran los primeros tres diseños.

Figura 3.1. Diseños de cuadrados.

a) ¿Cuántos cuadrados se añaden en cada diseño? ______________________________

b) Completen la tabla 3.5 y luego escriban una regla de la sucesión. ______________________________

Tabla 3.5

Posición del diseño	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Número de cuadrados									...

c) Propongan una manera de comprobar su regla. ______________________________

____

5. Completa la tabla 3.6.

Tabla 3.6

Regla de la sucesión	Términos de la sucesión					
	1	2	3	4	5	...
$4(n+1)$						...
$4n+4$						...
$2n+2(n-1)$						
$4(n-1)+8$						

a) ¿Hay reglas con las que obtienes los mismos términos? ¿Cuáles? ______________________________

b) Si sustituyes el mismo valor en dos o más reglas y obtienes el mismo término, ¿qué puedes decir acerca de las reglas? ______________________________

c) Simplifica las reglas de la tabla 3.6. ¿A qué expresión llegaste en cada caso? ______________________________

d) Con base en lo anterior, ¿qué puedes concluir acerca de las reglas? ______________________________

____

e) Reúnanse en equipo. Respondan con argumentos: dadas dos o más reglas, ¿qué significa que sean equivalentes?, ¿cómo pueden saber si lo son? ____________________

____

____

Dos expresiones algebraicas son **equivalentes** si tienen el mismo valor al sustituir la variable por el mismo número. Por ejemplo, $2(3n-5)$ y $6n-10$ son equivalentes, pues si sustituimos la variable n por cualquier número natural se obtiene el mismo valor:

Expresión	$2(3n-5)$				$6n-10$			
Número	1	2	23	42	1	2	23	42
Valor de la expresión	−4	2	128	242	−4	2	128	242

6. Analiza la sucesión que se presenta en la figura 3.2.

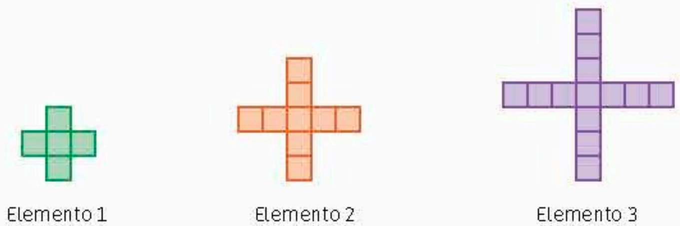


Figura 3.2. Sucesión de figuras.

a) Completa la tabla 3.7.

Tabla 3.7									
Posición de la figura	1	2	3	4	5	7	9	15	...
Número de cuadros									...

b) Escribe una regla para la sucesión. ____________________

c) Reúnete en equipo y comparen sus resultados. ¿Obtuvieron una fórmula igual o equivalente? En caso necesario corrijan y argumenten por qué.

7. En la figura 3.3 se construye cada diseño con triángulos, añadiendo palillos de la siguiente manera.

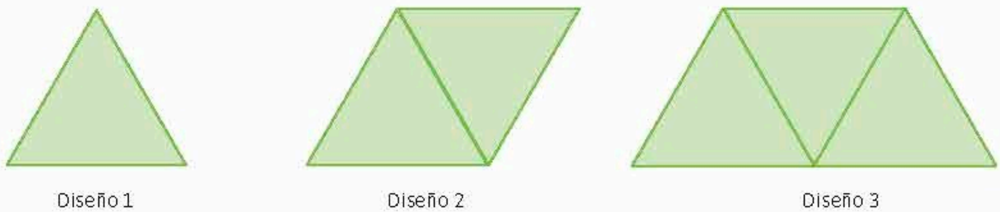


Figura 3.3. Triángulos con palillos.

a) Escribe una regla para la sucesión del número de palillos y compruébala.

____

b) Reúnanse en equipo. Comprueben si obtuvieron una fórmula igual o equivalente a partir de sus resultados. En caso necesario, corrijan y argumenten por qué.

c) Calculen cuántos palillos se tienen en total en el diseño 19. ______

d) Toma en cuenta las reglas $20 + n$ y $13 + 2(n - 6)$ y calculen su valor para $n = 19$.

______

e) Comparen los resultados de los incisos c) y d). ¿Cómo son? ¿Por qué? ______

______

f) Basados en los valores de la regla que cada uno encontró y de estas dos, ¿las expresiones son equivalentes? Expliquen. ______

______

Problemas de expresiones equivalentes

8. Completa la tabla 3.8.

Tabla 3.8

Regla de la sucesión	Términos de la sucesión								
	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$22-11n$									...
$11(2-n)$									...
$11-11(n-1)$									...

a) ¿Qué observas? ¿A qué se debe? Explica. ______

______

9. Escribe en la tabla 3.9 dos reglas equivalentes de cada sucesión.

Tabla 3.9

Términos de la sucesión	Reglas de la sucesión	
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...		
14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...		
5, 1, –3, –7, –11, –15, –19, ...		
$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...		

a) Reúnete en equipo. Comparen sus reglas. Discutan acerca de cómo comprobarlas y verifíquenlas.

10. Una sucesión comienza en 53 y cada término posterior se obtiene al restar 4 en cada paso.

a) Escribe una expresión algebraica que sea regla de la sucesión. ______

b) Reúnete en equipo, comparen sus expresiones y compruébenlas. Corrijan de ser necesario.

c) Analicen las siguientes expresiones. ¿Cuál o cuáles son iguales o equivalentes a la regla de la sucesión que escribieron? Expliquen.

$53-4\,(n-1)$ $\qquad 45-4(n-2)$ $\qquad 53n-4$ $\qquad 57-4n$

11. Asocia con una línea cada regla con su sucesión.

$6n-4$ $\qquad 24-12n$ $\qquad \frac{1}{2}n-\frac{3}{2}$ $\qquad 5n-1$ $\qquad 2(3n-2)$ $\qquad \frac{1}{2}(n-3)$ $\qquad 13-7n$

$-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots$ $\qquad 4, 9, 14, 19, \ldots$ $\qquad 12, 0, -12, -24, \ldots$ $\qquad 2, 8, 14, 20, \ldots$ $\qquad 6, -1, -8, -15, \ldots$

12. En cada caso indica si las expresiones son equivalentes. Explica.

a) $5n-5$ y $5(n-1)$

b) $4-2n$ y $2-2\,(n-1)$

c) $35+4n$ y $28+4(n+2)$

d) $3n-9$ y $3\,(n-2)-3$

e) $n+\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}n+(-1\frac{1}{2}-\frac{n}{2})$

f) Reúnanse en equipo. Razonen las características de las expresiones equivalentes para una misma sucesión. Argumenten y corrijan sus respuestas en caso necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Pablo está ahorrando para comprarse una *tablet* cuyo precio es \$13 000.00. Ya tiene \$2 500.00 y planea ahorrar \$420.00 cada semana.

a) ¿Con cuáles reglas puede calcular el dinero que tendrá en cualquier semana?

$420(n+\frac{2}{3})$ $\qquad 20(21n+125)$ $\qquad 420n+2500$ $\qquad 420n-2500$

b) ¿Por qué puede expresar su plan de ahorro por medio de reglas generales para sucesiones?

c) ¿En cuántas semanas habrá llegado a su meta?

Piensa y sé crítico

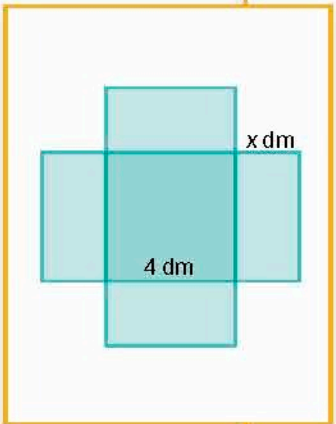
Una persona tiene padre y madre, y cada uno de ellos tiene dos ancestros: los cuatro abuelos de la persona, y así progresivamente. Como cada uno de los familiares tiene a su vez dos ancestros, entonces cada vez hay más. Con esto se puede concluir que en el pasado había mas personas que actualmente. ¿Crees que este razonamiento es correcto?

S20 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones

Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

L1 Equivalencia de expresiones algebraicas

Inicio



1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
   Cuatro amigos trazaron el desarrollo plano de una caja de base cuadrada sin tapa con las dimensiones que se indican en la figura: ahora requieren pintarla.
   a) Escribe una expresión general para calcular la superficie.
   b) Cecilia sugiere que el área se calcula con la expresión $4x + 4x + 4x + 4x + 16$, Enrique afirma que es $4(2x + 4) + 2(4x)$, Agustín menciona que se obtiene con $4(2x + 4) + 4(2x + 4) - 16$ y Renata dice que llegó a la expresión $16x + 16$. ¿Quién está en lo correcto? Explica.
   c) ¿Alguna de las expresiones anteriores coincide con la que escribiste? ¿Cuál?
   d) ¿Qué características tienen las expresiones algebraicas que son equivalentes?
   e) ¿Cuáles datos son necesarios para resolver el problema y cuáles no?
   f) Describe tus procedimientos para determinar las expresiones algebraicas que permiten describir el área.
2. Reúnanse en equipo. Escriban conclusiones sobre las expresiones equivalentes. Argumenten y corrijan si es necesario.

Desarrollo

Determinación de expresiones equivalentes

De acuerdo con los cálculos de perímetro y de áreas de polígonos regulares que ya conoces determinemos expresiones que sean equivalentes para obtenerlos.

1. Reúnanse en parejas. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder.
   Un artesano requiere conocer la cantidad de metal que utilizará en una pieza para un pendiente (figura 3.4).
   a) Calculen la cantidad de material requerido. ______
   b) Si las dimensiones se modifican, ¿el procedimiento para calcular la cantidad de material se mantiene? Expliquen. ______
   ______
   ______
   c) Escriban una expresión general para conocer la cantidad de material para la pieza.
   ______
   d) Completen la tabla 3.10. Evalúen las expresiones en los valores indicados para algunos heptágonos regulares (l es el valor del lado y a la apotema).

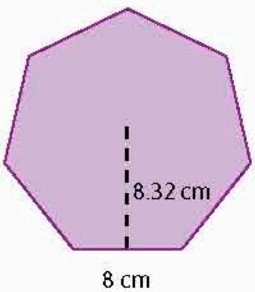


Figura 3.4

e) ¿A qué elemento de la figura corresponde el producto de n por l? Escriban las expresiones de la tabla sustituyendo este dato.

____

____

f) ¿Qué observan respecto a los resultados?

____

Tabla 3.10

Expresión	$l = 4, a = 4.15$	$l = 7, a = 7.26$	$l = 9.1, a = 9.44$
$\frac{n \times l \times a}{2}$			
$n \times \frac{a}{2} \times l$			
$\frac{1}{2} \times a \times n \times l$			

g) Reúnanse en equipo y comparen sus respuestas. Escriban una conclusión.

____

2. Intercambien pareja. En el rectángulo de la figura 3.5 se indica su perímetro.

a) Si la altura es $2x$, ¿cuál es la expresión para la base? Explica cómo la determinas.

____

____

b) Escriban otras dos expresiones de la base y la altura que resulten en el mismo perímetro.

- Base: ____________________ Altura: ____________________
- Base: ____________________ Altura: ____________________

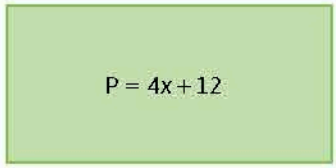


Figura 3.5

c) ¿Qué se conserva y qué varía en los rectángulos? Expliquen.

____

____

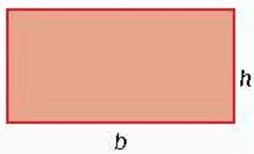
d) Reúnanse en equipo. Revisen sus procedimientos y resultados. Modelen otras figuras geométricas y sus expresiones para obtener los perímetros y áreas, a fin de determinar en qué casos son equivalentes. Argumenten y corrijan si es necesario.

Dos expresiones algebraicas son **equivalentes** si tienen el mismo valor, ya sea que se sustituyan las variables por el mismo número y siempre se obtenga el mismo resultado, o se realicen operaciones algebraicas para obtener una expresión a partir de la otra.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Determina cuáles expresiones te permiten obtener el perímetro de la figura.



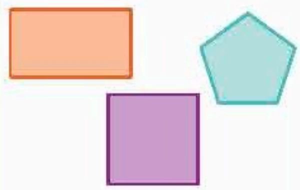
$2b + 2h$ $\quad$ $2(2b + h)$ $\quad$ $b + h + h + b$ $\quad$ $h + 2b + h$

a) ¿Cómo las elegiste?

L2 Expresiones de perímetros y áreas

Inicio

1. Analiza la situación. Haz lo que se te pide.
   Jaime colocará marcos de metal alrededor de tres espejos que tienen el mismo contorno, el cual se indica en la figura.



P = 20x + 40

   a) ¿Qué expresión algebraica describe el lado del espejo cuadrado? Explica.
   b) ¿Cuál es la expresión para el lado del espejo pentagonal?
   c) ¿Y las expresiones para las dimensiones del espejo rectangular?
   d) Calcula el perímetro de cada polígono. ¿Qué expresiones obtenidas son equivalentes? Explica.
   e) ¿Qué información es relevante para resolver el problema y cuál no?
   f) Describe el procedimiento que seguiste para responder.
2. Reúnanse en equipo. Expresen en qué casos se consideran que tienen expresiones equivalentes a partir de lo que han obtenido. Argumenten o corrijan sus resultados según sea el caso.

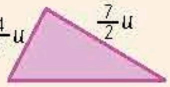
Desarrollo

Expresiones generales para perímetro y área

Recordemos las expresiones generales para obtener el perímetro o el área de una figura geométrica.

1. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Completen la tabla 3.11. Hagan los cálculos en su cuaderno.

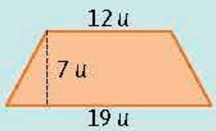
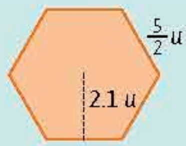
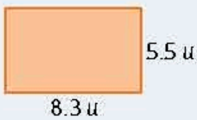
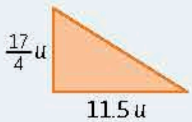
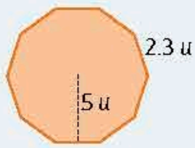
Tabla 3.11. Perímetros

Figura	Perímetro	Figura	Perímetro	Figura	Perímetro
 5.7 u		 3.87 u		 6.16 u	
 $3\frac{1}{2}u$, $8\frac{2}{5}u$		 $\frac{14}{5}u$, $\frac{7}{2}u$, $\frac{57}{10}u$		 $\frac{23}{4}u$	

   a) Escriban una expresión general para obtener el perímetro de las siguientes figuras.
      - Cuadrado: ____________________
      - Triángulo escaleno: ____________________
      - Rectángulo: ____________________
      - Pentágono regular: ____________________
      - Triángulo equilátero: ____________________
      - Octágono regular: ____________________
   b) En grupo, con la guía de su profesor, comparen las expresiones que escribieron. Discutan: ¿obtuvieron las mismas expresiones?, ¿cómo pueden validar que las expresiones que escribieron para cada figura son equivalentes?
2. Intercambien integrantes de equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Completen la tabla 3.12 de la página 227.

Tabla 3.12			
Figura	**Elementos para calcular el área**	**Literales para simbolizar**	**Expresión**
Cuadrado			
Rectángulo			
Triángulo rectángulo			
Trapecio			
Hexágono regular			
Decágono regular			

a) Completen la tabla 3.13 para validar sus expresiones. Además, escriban una expresión equivalente para calcular el área de las figuras.

Tabla 3.13. Áreas					
Figura	**Área y expresión equivalente**	**Figura**	**Área y expresión equivalente**	**Figura**	**Área y expresión equivalente**
					
					

b) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus expresiones. Discutan: ¿es posible transformar cada expresión algebraica de la tabla 3.12 en la correspondiente de la tabla 3.13? ¿Cómo? ¿Qué dirían acerca de la equivalencia entre ellas?

Equivalencia de expresiones algebraicas

Utilizaremos estas expresiones de área y perímetro para verificar la equivalencia de expresiones si los elementos de las figuras son algebraicos.

3. Analiza la figura 3.6. Realiza lo que se te pide.

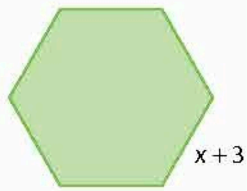


Figura 3.6

a) Escribe una expresión para calcular el perímetro de la figura: ______________

b) Completa la tabla 3.14.

Tabla 3.14									
Expresión perímetro	**Valores de x**								
	1	2	6	7	10	3.7	11.5	$\frac{5}{2}$	$\frac{33}{4}$
$6(x+3)$									
$3(x+3)-3(-x-3)$									
$6x+18$									

c) Compara los valores de perímetros, ¿qué observas? ______________________________

____

d) Escribe una conjetura para explicar por qué sucede este hecho. ______________________________

____

e) Simplifica las expresiones de la tabla. Hazlo en tu cuaderno.

- ¿Qué es lo que observas? ______________________________

____

- Revisa tu conjetura y modifícala si es necesario de acuerdo con tus observaciones. ______________________________

____

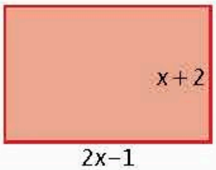


Figura 3.7

4. Reúnanse en parejas. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Analicen la figura 3.7. Hagan lo que se pide.

a) Individualmente escriban una expresión algebraica para obtener el perímetro de la figura. ______________________________

b) Comparen sus expresiones. ¿Cómo son entre sí? ______________________________

c) Discutan: en caso de que las expresiones difieran, ¿cómo sabrían si son equivalentes? ______________________________

d) Comparen sus expresiones con las de la tabla 3.15. ¿Coincide con alguna? ¿Cuál? Subráyenla. Completen la tabla.

Tabla 3.15

Expresión	Valores de x								
	1	2	3	5	8	1.6	9.1	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{4}$
$2(2x-1)+2(x+2)$									
$2(3x+1)$									
$6x+2$									
$4(3x-1)-(6x-6)$									

- ¿Con cuáles reglas obtienen el mismo resultado? Expliquen por qué sucede esto. ______________________________

____

____

____

- Simplifiquen las expresiones de la tabla, ¿a qué expresión llegaron en cada caso? ______________________________

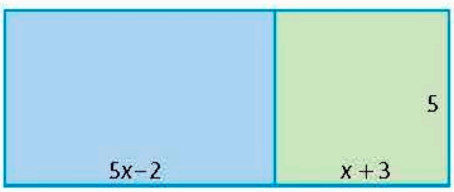


Figura 3.8

5. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Analicen la figura 3.8.

a) Individualmente escriban una expresión para calcular el área de la parte azul de la figura, otra para calcular el área de la parte verde y una más para el área del rectángulo completo.

____

b) ¿Cómo se relacionan las dos primeras expresiones con el área del rectángulo completo? ____

____

c) Discutan: en caso de que las expresiones difieran, ¿cómo sabrían si son equivalentes? ____

____

d) Comparen sus expresiones para el área del rectángulo completo. ¿qué observan? ¿Con cuál de las siguientes expresiones coinciden sus expresiones?

- $5(6x+1)$
- $30x+5$
- $(25x-10)+(5x+15)$
- $5(5x-2)+5(x+3)$

e) Completen la tabla 3.16 para validar sus expresiones.

Tabla 3.16

Expresión	Valores de x								
	1	4	5	7	12	2.5	7.2	$\frac{17}{2}$	$\frac{21}{4}$
$5(6x+1)$									
$30x+5$									
$(25x-10)+(5x+15)$									
$5(5x-2)+5(x+3)$									

f) ¿Qué reglas arrojan el mismo resultado? ¿Por qué consideran que sucede esto?

____

____

g) Simplifiquen las expresiones que aparecen en la tabla, ¿a qué expresión llegaron? ____

h) En grupo, con la guía de su profesor, discutan cómo se pueden determinar dos o más expresiones algebraicas equivalentes. Lleguen a una conclusión.

Para determinar que dos **expresiones algebraicas** son **equivalentes**, se pueden seguir estos pasos:

1. Evaluarlas para distintos valores de las literales comunes en ambas expresiones y verificar que los resultados son iguales.
2. Transformar una expresión mediante operaciones y manipulaciones algebraicas (como la factorización) para obtener la otra, lo que se conoce como **verificación algebraica**.

Problemas de expresiones algebraicas equivalentes

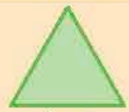
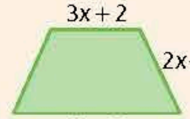
Portafolio P

¿Cuál es el perímetro de un polígono regular de 20 lados que miden $x-2$ unidades y cuya apotema mide 5 unidades? ¿Cuál es su área? Escribe dos expresiones equivalentes para ambos casos.

Ya que se ha explicado cómo determinar expresiones algebraicas equivalentes a partir de problemas de perímetro y de área, resolvamos situaciones en las que se aplican estos principios.

6. Reúnanse en equipo. Escriban en la tabla 3.17 dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de cada figura.

Tabla 3.17

Figura	Expresiones	Figura	Expresiones
 $4x-7$		 $x+4$; $5x+2$	
 $2x+1$		 $3x+2$; $2x-1$; $7x-2$	

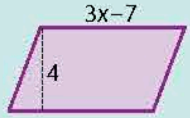
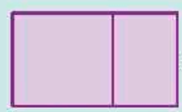
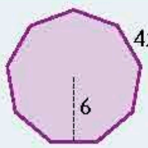
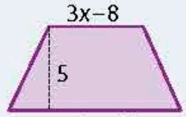
a) De acuerdo con las expresiones obtenidas, argumenten sus propuestas, desarrollen procedimientos para comprobar que son correctas y verifíquenlas.

b) ¿Qué semejanzas encuentran en los procedimientos para escribir las expresiones de los perímetros de las figuras? ______________________________

____

c) Realicen lo mismo para obtener expresiones equivalentes para el área de las figuras en la tabla 3.18.

Tabla 3.18

Figura	Expresiones	Figura	Expresiones
 $3x-7$; 4		 4; $6x-1$; $2x+1$	
 $4x-1$; 6		 $3x-8$; 5; $7x+2$	

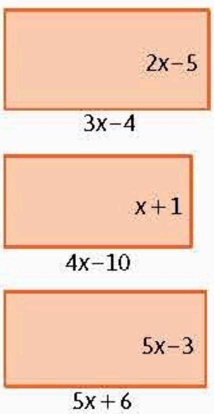


Figura 3.9

7. Realiza lo que se pide.

a) Marca los rectángulos de la figura 3.9 que tienen expresiones equivalentes para representar su perímetro.

b) Explica por qué las figuras que elegiste tienen expresiones equivalentes. ______________________________

____

____

c) ¿Los lados son iguales en las figuras que tienen expresiones equivalentes? Explica.

____

____

d) Escribe una expresión para calcular el área de cada rectángulo de la figura 3.10. Luego, transforma cada expresión en otras dos que sean equivalentes con la de inicio. ____________________

e) ¿Cómo puedes validar que las tres expresiones para el área de cada rectángulo son equivalentes? ____________________

____

f) En grupo, con la guía de su profesor, discutan: ¿por qué si los perímetros o las áreas de dos o más figuras tienen el mismo valor no implica que los lados sean iguales?

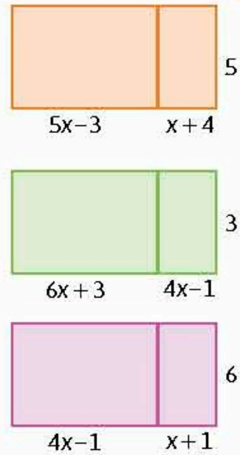


Figura 3.10

8. En cada caso indica si la igualdad entre expresiones es cierta. Si alguno no cumple la igualdad, ¿qué cambiarías para que sí cumpla?

a) $3x + 7 + 2(3x + 7) + 3x + 7 = 12x + 28$ ____________________

b) $2(5x + 8) = 10x + 16$ ____________________

c) $2x + 3(7 - 3x) + 6 = 7x + 27$ ____________________

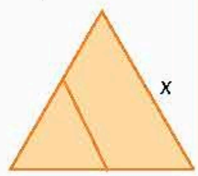
d) $2(5x - 4) + 2(2x + 5) = 14x + 18$ ____________________

e) $5(3x + 2) + 2(7x - 3) = 29x + 4$ ____________________

f) Reúnanse en equipo. Utilicen argumentaciones a fin de validar sus resultados o hagan las correcciones necesarias con el fin de describir la equivalencia de expresiones algebraicas.

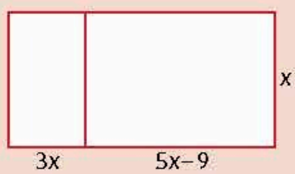
Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En la figura, el segmento interior une los puntos medios de dos lados del triángulo equilátero.
   a) ¿Cuál expresión algebraica permite obtener el perímetro del triángulo mayor?
   b) ¿Qué expresión es la que describe el lado del triángulo menor?
   c) ¿Cuál es la expresión algebraica para obtener el perímetro del triángulo menor?
   d) Describe tus procedimientos para obtener dichas expresiones.



Piensa y sé crítico

¿Cómo sería la expresión algebraica para representar el área de un terreno con las medidas descritas en la figura?



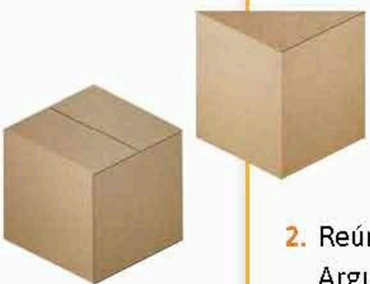
S21 Volumen de prismas rectos

Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

L1 Volumen de prismas rectos con base en forma de polígono regular

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
   Una compañía cambiará el empaque de un producto por una caja con base en forma de triángulo equilátero. La caja anterior era de forma cúbica, como se muestra en la figura. Ambas cajas deben tener el mismo volumen; la caja cúbica mide 11 cm por cada lado, así que decidieron que la nueva caja tuviera por lado 15 cm y con una altura de 12.99 cm.
   a) ¿Qué volumen deben tener ambas cajas?
   b) ¿Cómo obtuviste el volumen de la caja cúbica?
   c) ¿Cuál es la altura de la caja de base triangular?
   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describe el procedimiento que realizaste para conocer la altura de la segunda caja.



2. Reúnanse en equipo. Escriban conclusiones sobre las expresiones equivalentes. Argumenten y corrijan si es necesario.

Base triangular y cuadrangular

Recordemos primero algunos aspectos de los prismas rectos y el cálculo de volumen de los que ya conocemos.

Desarrollo

1. En la imagen se presentan varios cuerpos geométricos. Analízalos y realiza lo que se te pide.

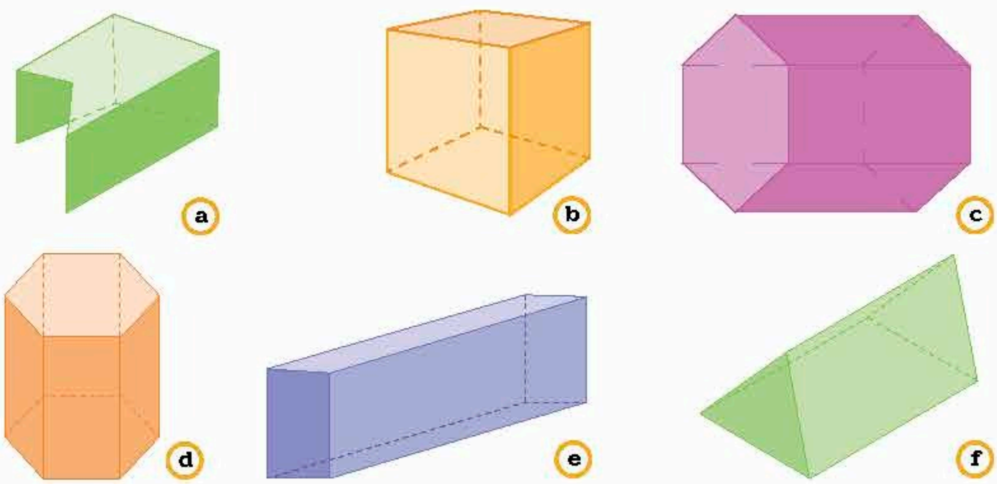


Figura 3.11. Diversos cuerpos geométricos.

a) Encierra con un color los prismas rectos. Escribe sus características principales.

b) ¿Cuáles de los prismas rectos seleccionados tienen como base un polígono regular?

c) Escribe los incisos de los prismas rectos que sabes cómo calcular su volumen. ¿Cómo lo obtienes?

d) Describe cómo descompones el prisma marcado con a para calcular su volumen.

2. Calcula el volumen de cada figura en tu cuaderno. Escribe el resultado en el espacio correspondiente.

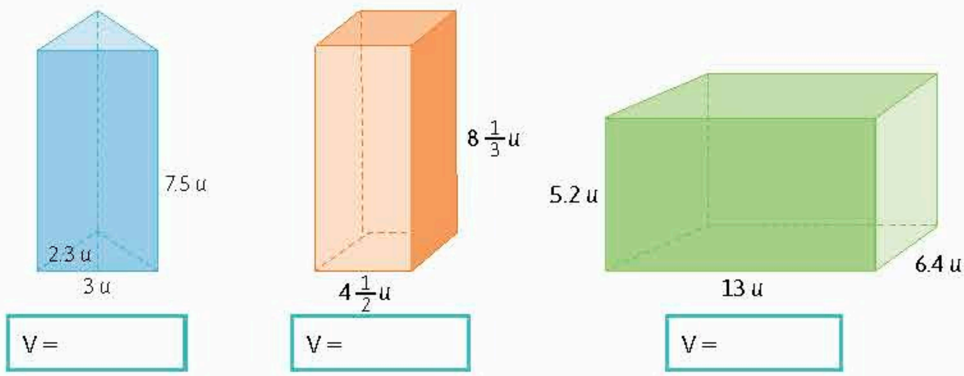


Figura 3.12. Diversos prismas.

a) ¿Requieres conocer el área de la base del prisma para obtener el volumen? ¿Por qué?

b) ¿Qué semejanzas encuentras en los procedimientos para obtener los volúmenes de las figuras?

c) Supón que tienes dos prismas rectos, uno de base cuadrada y otro de triángulo equilátero, con la misma altura. ¿De qué depende que uno tenga más volumen que el otro? Explica en tu cuaderno. Haz dibujos.

d) ¿Consideras que es posible aplicar el procedimiento del inciso b) si la base del prisma es cualquier polígono regular de más lados? Explica.

e) Reúnanse en equipo. Comparen sus resultados y procedimientos. Analicen qué características de los prismas triangulares y cuadrangulares tienen otros prismas.

Base en forma de polígono regular

Veamos qué aspectos del volumen de un prisma recto de base triangular o en forma de cuadrilátero sirve para establecer el caso de un polígono regular con mayor número de lados.

3. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y los procedimientos para responder en su cuaderno.
   a) Tracen en una cartulina el desarrollo plano de un prisma recto con base en forma de triángulo equilátero, luego recorten y armen el prisma. ¿Cuál es su volumen? ¿Cómo lo obtuvieron?
   b) Reproduzcan y armen otras cinco veces este prisma y apílenlos como indica la figura 3.13. Consideren el prisma así formado. ¿Qué polígono se forma en la base? ¿Qué elemento del triángulo coincide con el apotema del polígono?
   c) Calculen los siguientes valores: el área de seis triángulos equiláteros y el área de la figura que se forma en la base. ¿Cómo son estos valores? ¿Por qué?
   d) Respecto al prisma formado, ¿qué fracción representa cada prisma triangular?
   e) Calculen el volumen del prisma formado.
   f) Supongan que tienen de un prisma con base de octágono regular. ¿Podrían descomponerlo en prismas triangulares? ¿Cómo? ¿Podrían calcular el volumen del prisma octagonal? Expliquen.

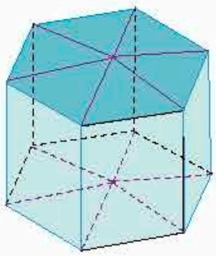


Figura 3.13. Armado de prismas triangulares.

4. Intercambien integrantes de equipo. A partir de los resultados de la actividad anterior, respondan lo que se les pide.
   a) ¿Se puede realizar este mismo procedimiento para cualquier polígono regular, considerando el perímetro y la apotema? Describe en tu cuaderno el procedimiento ______________________________
   ____
   ____
   b) Escriban una expresión para obtener el volumen de un prisma recto, considerando el perímetro y la apotema. ______________________________
   c) Completen la tabla 3.19 para validar su fórmula.

Tabla 3.19

Polígono regular de la base del prisma	Medidas del lado (cm)	Medidas de la apotema (cm)	Área de la base (cm^2)	Altura del prisma (cm)	Volumen (cm^3)
Pentágono	4	2.75		7	
Hexágono	4	3.46		8	
Heptágono	4	4.61		9	
Octágono	4	4.83		10	
Nonágono	4	5.84		11	
Decágono	4	6.47		12	

d) Reúnanse con otros equipos. Verifiquen sus resultados y las expresiones obtenidas. Argumenten y corrijan si lo consideran necesario.

El volumen de un prisma recto cuya base tiene forma de polígono regular, se obtiene mediante la expresión

$$V = A_B h = \left(\frac{P \times a}{2}\right)(h) = \frac{n \times l \times a \times h}{2}$$

donde A_B es el área de la base, P es el perímetro; a, la apotema; n, el número de lados; l, la medida del lado y h, la altura.

5. En grupo, con la guía de su profesor, discutan: si tienen un prisma recto con base de polígono regular...

a) y conocen el volumen y el área, ¿cómo calculan su altura?

b) y conocen el volumen y la altura, ¿cómo calculan su área?

c) Propongan ejemplos y resuélvanlos en el pizarrón.

d) Escriban en su cuaderno una conclusión.

6. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y los procedimientos para responder.

a) Se tiene un prisma recto cuya base es un decágono regular con área igual a 34 cm^2 y con volumen de 170 cm^3. ¿Cuál es el valor de su altura? ______________

b) ¿Cómo determinan las dimensiones de la base (medida de los lados y la apotema) si conocen el área de la base y la altura? ______________

____

____

____

c) En grupo, con la guía de su profesor, discutan sus respuestas. Corrijan si es necesario. Lleguen a una conclusión.

Conoce más

Como recordatorio de los pasos para obtener volúmenes de prismas, consulta la página: http://www.edutics.mx/UQk. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Cierre

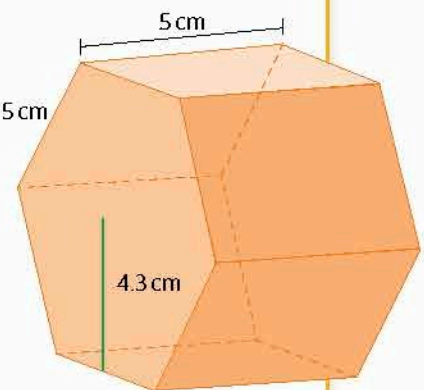
1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. La figura representa una caja de dulces, cuyas medidas se indican en ella.

a) Un empleado menciona que su volumen es de 107.5 cm^3. ¿Es correcto? Explica.

b) Otra caja de dulces tiene la misma forma, pero cada dimensión es el doble de las dimensiones de la otra caja. ¿Cuál será el volumen de esta segunda caja?

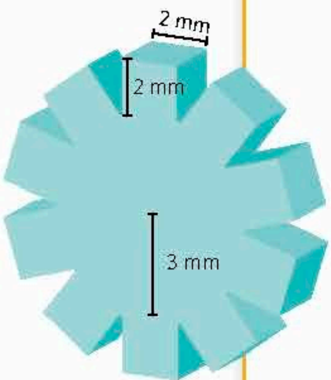
c) ¿Cuántas veces es más grande el volumen de la caja mayor que la primera caja?



L2 Problemas de volumen de prismas rectos

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
A los ingenieros de una fábrica les han encargado unas piezas de repuesto como la que se muestra en la figura. Necesitan saber el volumen de cada una, pues los harán con un plástico duro que es muy caro.



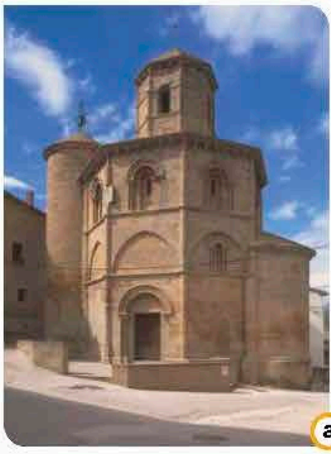
a) ¿Qué figuras geométricas conforman la pieza de repuesto?
b) Calcula el volumen de una pieza.
c) ¿Qué volumen de material, en decímetros cúbicos, necesitan para fabricar 1 850 piezas?
d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
e) Describe los procedimientos que realizaste para conocer la cantidad de material para los engranes.

2. Reúnanse en equipo. Calculen los elementos relacionados con el volumen de prismas rectos y comparen sus resultados. Argumenten y corrijan si es necesario.

Problemas de volumen de prismas rectos

Apliquemos a continuación lo aprendido respecto al cálculo de volumen de prismas rectos.

1. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y los procedimientos para responder. Analicen la situación.
En la figura 3.13a y 3.13b aparecen la vista de la Torre del Santo Sepulcro y su bóveda respectivamente. Esta torre se localiza en el poblado de Torres del Río, en Navarra, España. La torrecita superior sobre el cuerpo principal se llama linterna y ambas tienen la misma forma. Un visitante preguntó a un guía de turistas algunos datos de la estructura. El guía contestó: La altura total es de 17.70 m, en la torre principal, los lados miden 4 m con una apotema de 4.82m, además la bóveda está a una altura de 10.55 m.


a


b

Figura 3.14. Vista panorámica (a) y de la lanterna (b) de la Torre del Santo Sepulcro, en Navarra, España.

a) ¿Qué forma tienen la torre principal y la linterna? ______________________
____
b) ¿Qué altura tiene la linterna? ______________________
c) ¿Cuál es el volumen de la torre principal? ______________________
d) Las medidas de la base de la linterna son la mitad de las de la torre principal. ¿Cuál es el volumen de la linterna? ¿Cuál es el volumen total de la torre y la linterna? ______________________

2. Intercambien integrantes en el equipo. Analicen y respondan.
Se quieren fabricar jarras con formas de prisma recto cuya base sea un polígono regular. Las jarras son de dos tipos, las que tienen por base un octágono regular y las de menor capacidad, que tienen por base un hexágono regular.

a) ¿Qué altura debe tener la jarra con base de hexágono regular para que pueda contener 1.1 L, si el lado del hexágono es de 4.6 cm y la apotema es de 4 cm? ____________

b) ¿Qué capacidad, en litros, tiene la jarra cuya base es un octágono regular de lado 4.2 cm, apotema 5 cm y altura de 21 cm? ____________

c) ¿Cuál es la altura de la jarra cuya base es un octágono regular con las medidas anteriores del polígono para contener $2\frac{1}{2}$ L? ____________

3. Individualmente resuelve las situaciones en tu cuaderno.

a) Un joyero tiene forma de un prisma con base hexagonal; la longitud de cada lado es de 3 cm, la apotema es de 2.6 cm y la altura es de 3 cm. ¿Cuál es su volumen?
- Un collar está formado por 18 cuentas cúbicas de 1.5 cm de lado. ¿Se puede guardar en el joyero? Explica.

b) Se tiene un vaso en forma de prisma recto decagonal con área igual a 25 cm^2 y con volumen de 170 cm^3.
- ¿Cuál es su altura? ¿Cómo lo obtienes?
- Si el lado del decágono es de 2 cm, ¿cuánto es su apotema? Explica su obtención.

c) Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas. En caso de haber diferencias, argumenten sus procedimientos. Corrijan si es necesario.

Portafolio P

¿Consideras que tienes las herramientas para calcular el volumen de un prisma con base pentadecagonal (15 lados) regular de 2 cm de lado, 9 cm de apotema y 5 cm de altura? Realiza un cartel explicando el proceso de solución.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Los alminares o minaretes son las torres de las mezquitas musulmanas, cuyo nombre proviene del árabe *minar* o *manar*. El que se muestra en la figura corresponde a la Mezquita del Profeta, en Medina, Arabia Saudita.

a) ¿Qué prismas forman los tres primeros tramos del minarete, sin incluir los balcones?

b) El tramo inferior tiene lados de 5 m y altura de 12 m; el segundo, con una altura de 9 m, lados de 1.5 m y apotema de 1.8 m; el tercer tramo, una altura de 6 m, lados de 0.8 m y un apotema de 1.8 m. Calcula el volumen de cada tramo y el de los tres tramos mencionados.

c) ¿Qué procedimiento realizaste para este cálculo?

Piensa y sé crítico

¿Cómo obtienes el volumen de una caja de herramientas como la que se muestra en la figura?
¿Hay otra manera de calcularlo? Discute con tus compañeros al respecto.

S22 Volumen de cilindros rectos

Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

L1 Volumen de cilindros rectos

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
   Ana ha ido a la playa y juega con una lata sin etiqueta y un juguete de plástico con forma de caja. Con el juguete llena completamente la lata con agua al vaciar 3 cubos totalmente llenos.
   - **a)** ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y su capacidad? Considera que 1 cm^3 = 1 mL.
   - **b)** ¿Cuál es la capacidad de la lata? ¿Y su volumen?
   - **c)** Luego Ana transvasa el agua de la lata a otra y nota que ésta última queda aproximadamente llena a la mitad de su capacidad. ¿Qué puedes decir acerca del volumen de la segunda lata?
   - **d)** ¿Cuál información es relevante para responder y cuál no?
   - **e)** Describe el procedimiento que realizaste para conocer el volumen de las dos latas.
2. Reúnanse en equipo. Discutan cómo se relaciona la capacidad y el volumen de un objeto y cómo pueden inferir el volumen de una lata a partir del volumen de un cubo.

Desarrollo

Características de los cilindros rectos

Conozcamos primero las características principales de un cilindro recto.

1. Considera los cuerpos geométricos de la figura 3.15. Encierra en un círculo aquellos que tengan bases circulares paralelas unidas por una pared curva.

Infomáticas

En 1810, Peter Durand patenta el primer recipiente hecho de hojalata para guardar alimentos, el origen de las latas de conservas.

Fuente: http://edutics.mx/wh5. (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

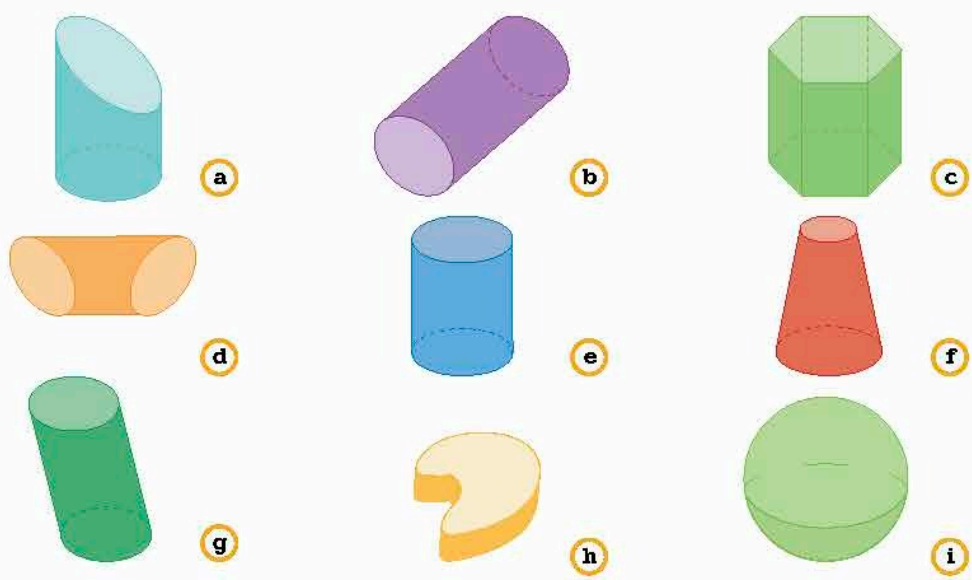


Figura 3.15. Diversos cuerpos geométricos.

Un **cilindro recto** es un cuerpo con bases circulares paralelas unidas por una pared curva perpendicular a las bases. El **radio del cilindro** es el radio del círculo de sus bases y su **altura** es la distancia entre las mismas perpendicular a ambas caras.

a) Señala el radio y la altura en los cilindros que identificaste en la figura 3.14 (página 238).

b) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Corrijan si es necesario. Comenten en dónde han visto objetos con forma de cilindro."

Fórmula del volumen de un cilindro recto

A continuación establezcamos la regla general para calcular el volumen de estos cuerpos, comparando con lo que ya conocemos de los prismas.

2. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Consideren los cilindros de la figura 3.16.

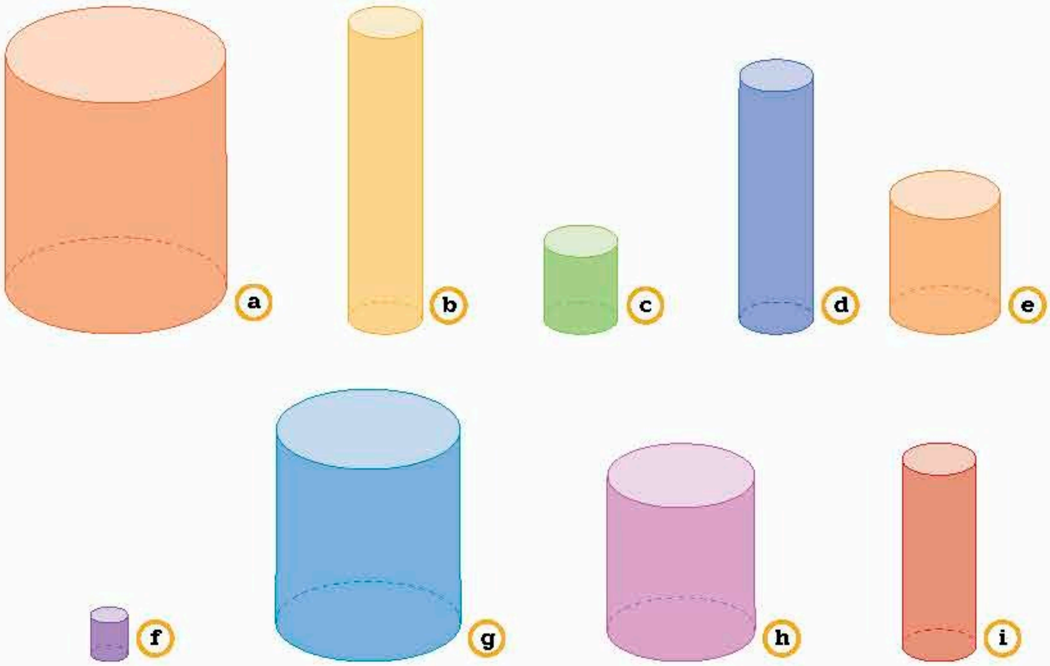


Figura 3.16. Cilindros de diversos tamaños.

a) Ordena los cilindros en forma ascendente según su volumen. ______________________________

____

b) Si el volumen del cilindro **e** es de 750 cm^3, estima qué cilindro tiene volumen de 1000 cm^3. Argumenta. ______________________________

____

c) Estima cuál es el volumen del cilindro más grande. Explica. ______________________________

____

d) Estima qué volumen tiene el cilindro más chico. Argumenta. ______________________________

____

____

e) Discutan: si tuvieran latas con las forma de los cilindros de la figura 3.16, ¿cómo podrían saber si sus estimaciones fueron correctas?

3. Intercambien compañeros de equipo. Analicen los cuerpos de la figura 3.17.

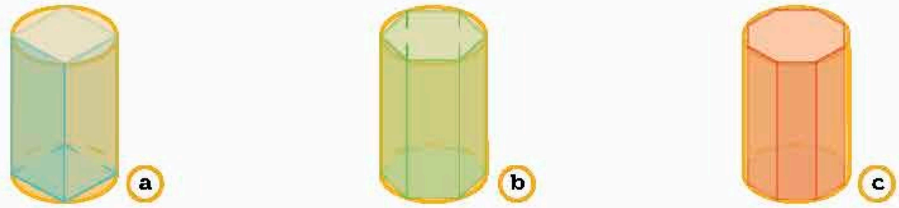


Figura 3.17. Prismas inscritos en cilindros.

a) ¿Qué tipo de prismas se encuentran inscritos dentro de cada cilindro? ____________

____

b) ¿Cómo obtienen el volumen de cada prisma? ____________

____

c) ¿Qué sucede con el número de lados de la base de cada prisma? ____________

d) Si aumentan los lados del polígono regular de la base, ¿qué sucederá con los volúmenes del prisma y del cilindro? Expliquen. ____________

e) Describan un procedimiento para obtener el volumen de un cilindro a partir de lo que han observado. ____________

____

f) Escriban una expresión algebraica que describa su procedimiento para obtener el volumen de un cilindro. ____________

4. Intercambien compañeros de equipo. Completen la tabla 3.20 con el cálculo del volumen de cada sólido. Luego realicen lo que se pide.

Tabla 3.20

Figura de la base	Lado	Apotema	Radio del círculo circunscrito	Área de la base	Altura	Volumen
Cuadrado	4.246	1.06	3		5	
Hexágono	2.6	3	3		5	
Octágono	2.28	2.75	3		5	
Círculo	-----	-----	3		5	

a) ¿De qué manera obtienen el área de un círculo? ____________

b) ¿El procedimiento para calcular el volumen de un cilindro recto es similar al de un prisma recto? Expliquen. ____________

____

c) Dado el radio r y la altura h del cilindro, escriban una regla algebraica para obtener el volumen de un cilindro recto. ____________

d) Verifiquen sus resultados y los de otros equipos. Discutan sus procedimientos. Argumenten y, en caso necesario, hagan correcciones.

Para calcular el **volumen de un cilindro recto**, el procedimiento es similar al de un prisma recto: multiplicar el área de la base por la medida de la altura del cilindro. Como la base es circular y su área se calcula como $A = \pi r^2$, entonces la expresión para calcular el volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es el radio del círculo y h la altura del cilindro.

5. Reúnanse en equipo. Convengan la estrategia y procedimientos para responder. Completen la tabla 3.21 con los cálculos de volumen de cada objeto con forma cilíndrica.

Tabla 3.21

Recipiente	Radio	Diámetro	Altura	Área de la base	Volumen
Vaso	2 cm	4 cm	12 cm		
Tinaco	1 m		2 m		
Tambo			13 dm	78.5 dm^2	
Botella de jugo		8 cm			1005.31 cm^3
Cubeta			35 cm		18 000 cm^3

a) Describan un procedimiento para obtener la altura del cilindro dados el volumen y el área de la base. ______

______

______

b) Si se tienen como datos el volumen y la altura, ¿cómo obtienen el radio de la base?

______

______

c) En grupo, con la guía de su profesor, discutan las maneras de obtener algún elemento de un cilindro dados otros. Lleguen a una conclusión.

Conoce más

En la página http://www.edutics.mx/UQv, encontrarás una calculadora del volumen de un cilindro. Coloca algunas cantidades de radio y de altura, luego comprueba que funciona correctamente. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Para obtener el volumen de un florero de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura, Sandra y Marcos realizan sus cálculos. Sandra obtiene un volumen de 1 570.8 cm^3, mientras que Marcos uno de 6 283.2 cm^3.
   a) ¿Quién de los dos tiene el resultado correcto? Explica la razón.
   b) ¿Cuál fue el error de cálculo que cometió la otra persona?
   c) ¿Cuántos litros de agua le caben al florero? ¿Cómo sabes?

L2 Problemas de volumen de cilindros rectos

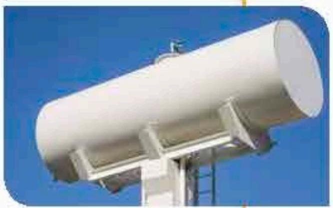
Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.

Un tanque de gas estacionario tiene la forma que se muestra en la figura. Sus medidas son de 60 cm de diámetro y 178 cm de largo.

a) ¿Cuántos litros le caben a ese tanque?

b) Un tanque estacionario no debe de llenarse más allá de $\frac{4}{5}$ partes de su capacidad. ¿Cuántos litros de gas se le pueden cargar como máximo?



c) Si se lee en el medidor que el tanque ya tiene 135 L, ¿cuántos litros faltan para no rebasar su capacidad máxima?

d) ¿Qué longitud debería tener el tanque si se desea que tenga una capacidad de 650 L y el mismo diámetro?

e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

f) Describe los procedimientos que realizaste para para responder.

2. Reúnanse en equipo. Calculen los elementos que son parte del volumen de un prisma recto y revisen sus resultados. Corrijan si es necesario.

Desarrollo

Problemas de volumen de cilindros rectos

Apliquemos lo aprendido sobre el cálculo del volumen de cilindros rectos.

1. Reúnanse en equipo. Analicen y resuelvan en su cuaderno las situaciones.

a) La altura de un recipiente para guardar alimentos es de 20 cm y la base tiene un radio de 15 cm. ¿Cuál es su volumen?

b) Una lata de verduras mide lo mismo de radio que de altura, que es de 16 cm. ¿Cuál es su volumen?

- ¿De cuánto será el volumen de otra lata de verduras si mide 16 cm de diámetro y de altura?
- ¿Cuál lata tiene mayor volumen? ¿Cuántas veces es mayor ese volumen?

Figura 3.18. Ángel de la Independencia.

c) El monumento conocido como Ángel de la Independencia (figura 3.18), ubicado en la Ciudad de México, tiene una altura total de 36 m. Está formado por un prisma cuadrangular con altura de 2 m y lado de 8 m aproximadamente, le sigue un cubo de 4 m de lado y luego la columna cilíndrica de 2.69 m de diámetro.

- ¿Qué volumen tiene el prisma cuadrangular de la base?
- El cubo de la base, ¿qué volumen tiene?
- ¿Qué volumen tiene la columna?
- ¿Cuál es el volumen total del monumento?

Infomáticas

Porfirio Díaz mando construir el Monumento a la Independencia, conocido como El Ángel o la Columna de la Independencia. Fue inaugurado el 16 de septiembre de 1910 en celebración de los 100 años de la independencia de México.

d) Un empaque para pelotas de tenis es un cilindro recto al que le caben tres pelotas, cada una mide 6.8 cm de diámetro.

- ¿Cuánto miden el radio y la altura del empaque si se fabrica justo con las medidas de las pelotas de tenis?
- ¿Cuánto es su volumen?
- Si el empaque se fabrica con 3 mm de holgura en la parte superior y lateral, ¿cuáles son sus dimensiones?
- ¿Cuál es el volumen?

2. Analiza la situación. Responde lo que se te pide.
Los silos (figura 3.19) son, en general, cilindros rectos en los que se almacenan granos, como el maíz, en grandes cantidades. Se construyen de metal con tapas en forma de cono. Los silos tienen distintas medidas. El peso del maíz guardado es de 680 kg por metro cúbico.

a) Completa la tabla 3.22.

Figura 3.19. Silos de diversos tamaños.

Tabla 3.22

Diámetro (m)	Radio (m)	Altura (m)	Volumen (m^3)	Peso del grano (kg)
9	4.5	12.5	795.2	
	5		206.4	
		10	412.8	
10		7.5		
	7.5			885 620
		17.5		934 626

b) ¿Cómo obtienes la altura a partir del volumen y el radio del cilindro?

c) Utiliza una calculadora para validar tus resultados. Reúnanse en equipo para que argumenten o corrijan sus respuestas.

Portafolio P
¿Cómo obtienes los elementos de un cilindro dado su volumen? Realiza un cuadro sinóptico en el que expliques tus procedimientos.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. El edificio Guangzhou Circle, ubicado en la ciudad china del mismo nombre, tiene forma similar a una dona y, cuando se refleja en el agua, asemeja el número 8, que es el número de la suerte en China. Situado al borde del río Pearl, el edificio mide 138 m de altura. El hueco tiene un diámetro de 48 m y la profundidad del edificio es de 19 m.
   a) ¿Cuál es el volumen total del cilindro?
   b) ¿Cuántos metros cúbicos hay en el espacio hueco?
   c) ¿Cómo obtienes el volumen que ocupa realmente el edificio?
   d) Describe tus procedimientos para obtener cada dato.

Conoce más +
Para trabajar más ejercicios relacionados con el volumen del cilindro, consulta: http://www.edutics.mx/UAk. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Piensa y sé crítico

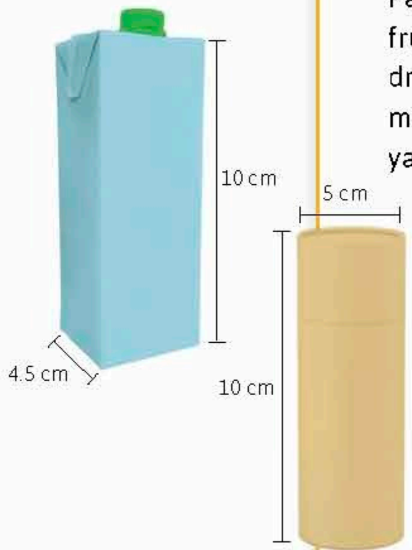
Considera un cilindro recto con radio *r* y altura *h*.
¿Cuánto aumenta el volumen del cilindro si duplicas la altura? ¿Cuánto si duplicas el radio? ¿Cuántas veces es mayor el volumen si duplicas ambas variables? ¿Cómo puedes comprobar tus respuestas?

S23 Desarrollos planos de prismas y cilindros rectos

Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

L1 Desarrollos planos

Inicio



1. Analiza la situación y responde lo que se pide.
   Pablo quiere saber qué envase le conviene más para comercializar el agua de frutas de su compañía. Tiene dos posibilidades: un prisma recto con base cuadrada o un cilindro con las medidas que aparecen en la figura. Pablo quiere la mayor superficie posible para poner el nombre de la compañía en el envase, ya que dice que, en ambos casos, el volumen es casi el mismo.
   a) ¿Es correcta su afirmación de que los envases tienen casi el mismo volumen? Explica.
   b) ¿Qué superficie lateral tiene el prisma cuadrangular?
   c) Identifica la cara lateral del cilindro. Si hicieras un corte en ella, y luego la extendieras, ¿qué figura obtendrías? ¿Cómo?
   d) ¿Cuál información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describe el procedimiento que realizaste para responder.
2. Reúnanse en equipo. Expliquen los procedimientos y resultados a sus compañeros. Den argumentos o corrijan si es necesario.

Desarrollo

Desarrollo plano de prismas rectos

Trabajemos primero en un desarrollo plano de un prisma recto.

1. Analiza el prisma de la figura 3.20. Luego responde lo que se te pide.

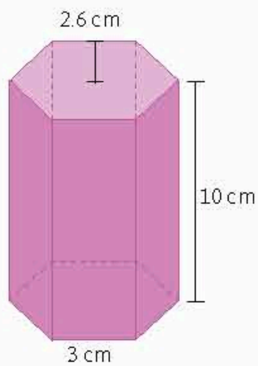


Figura 3.20

   a) ¿Cómo son los rectángulos que forman este prisma? ____
   b) ¿Cuántos rectángulos hay? ____
   c) ¿Cómo son los hexágonos que forman este prisma? ____
   d) Para construir este prisma, ¿cuántos rectángulos y cuántos hexágonos necesitamos?
   ____
   ____
   e) Propón una manera de colocar los rectángulos y los hexágonos para poder construir el prisma. ____
   ____
   ____
   f) Supón que el prisma es un caja y que abres la tapa, luego abres la base y que ambas quedan pegadas a un rectángulo, después separas dos rectángulos por una arista. Dibuja en tu cuaderno la forma que se obtiene.

g) ¿Es posible reconstruir cualquier prisma recto con un esquema similar a éste? Explica. ______________________________

2. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Analicen los esquemas de la figura 3.21.

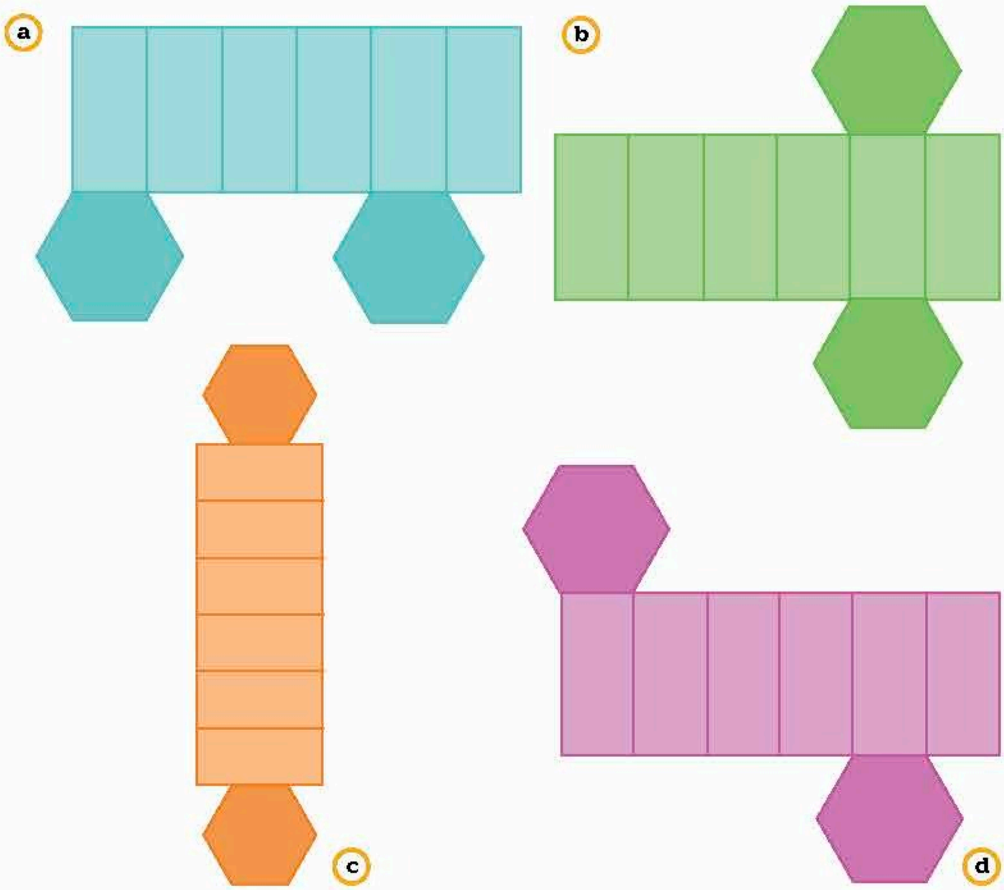


Figura 3.21. Esquemas con rectángulos y hexágonos.

a) Encierren las figuras con las cuales se puede armar un prisma hexagonal. Expliquen. ______________________________

____

b) ¿De qué manera pueden comprobar que se puede construir un prisma en cada caso que eligieron? ______________________________

____

c) ¿Alguno de estos esquemas es similar al que dibujaste en la actividad anterior? ¿Cuál? ______________________________

d) Propongan la definición del desarrollo plano de un prisma y sus características. Escríbanlas. ______________________________

____

____

____

Conoce más

Para conocer más aspectos del desarrollo plano de los prismas rectos, visita: http://www.edutics.mx/UAB. (Consulta: 20 de junio de 2018).

3. Observa los desarrollos planos y los prismas de la figura 3.22. Asocia cada uno con su correspondiente, es decir, indica cuál de los desarrollos planos construye el correspondiente prisma correcto.

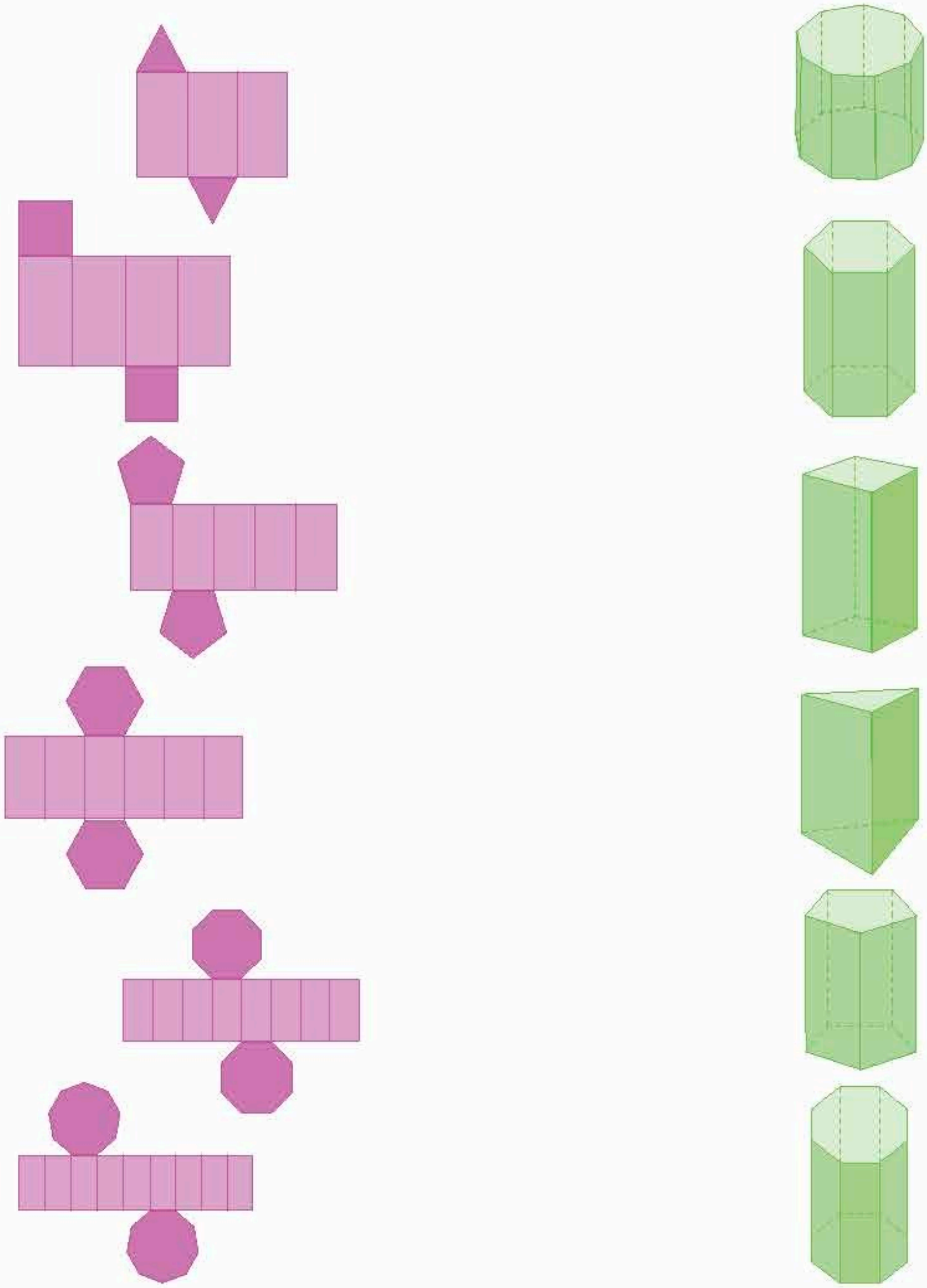


Figura 3.22

a) Consideren el prisma y su desarrollo plano. ¿Qué elemento del primero es igual al largo de cada rectángulo del segundo? ¿Qué elemento del prisma es igual al ancho de cada rectángulo de su desarrollo plano? ______________________

____

b) Discutan con otros equipos las características de los desarrollos planos para prismas rectos.

El **desarrollo plano** de un **prisma recto** es una figura plana formada por rectángulos y dos polígonos regulares idénticos unidos por sus lados. Estos se puedan doblar (por los bordes) para formar las caras del prisma recto y cuyas bases son los polígonos regulares.

El **área total** de un prisma recto es el área de los rectángulos correspondientes a la sección lateral, más el de los polígonos regulares que corresponden a la base y a la tapa.

Infomáticas

Los desarrollos de prismas rectos son útiles para estudiar los cuerpos geométricos, ya que se pueden construir con diferentes materiales como papel o cartón.

Desarrollo plano de cilindros rectos

Ya que se ha identificado el desarrollo plano de los prismas rectos, trabajemos el caso del cilindro recto.

4. Analiza el cilindro de la figura 3.23. Responde a lo que se te pide.

a) ¿Qué figuras forman las bases del cilindro? ______

b) ¿Qué polígono corresponde a su área lateral? Explica: ______

______

c) Propón en tu cuaderno un esquema que represente el desarrollo plano de este cilindro.

d) ¿Qué semejanzas tiene este esquema con el desarrollo plano de un prisma recto? ______

______

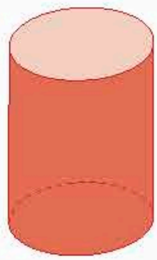
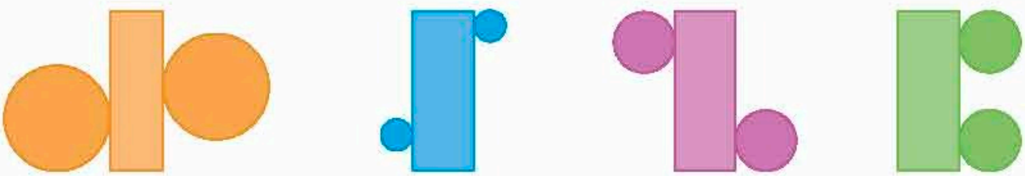


Figura 3.23

5. Reúnanse en equipo. Determinen la estrategia y los procedimientos para responder. Consideren figura 3.24. Escriban si es posible construir un cilindro con el desarrollo plano propuesto. Justifiquen su respuesta.



______ ______ ______ ______

______ ______ ______ ______

______ ______ ______ ______

Figura 3.24. Posibles desarrollos planos de un cilindro.

a) ¿Qué características debe tener el desarrollo plano para poder construir un cilindro recto? ______

______

b) ¿Cómo calculas el área del desarrollo plano del cilindro?, ¿qué dato del cilindro obtienes? ______

c) Discutan con otros equipos las características de los desarrollos planos para cilindros. ¿Cuál es la relación entre el largo del rectángulo del desarrollo plano y la circunferencia de la base? ¿Y entre el ancho y la altura del cilindro?

Conoce más
Para una visualización del desarrollo plano del cilindro, visita la página: http://www.edutics.mx/Ub6. (Consulta 20 de junio de 2018).

El **desarrollo plano** de un **cilindro recto** cerrado se conforma por dos círculos que son la base y la tapa del sólido, unidos por un rectángulo que corresponde a la sección lateral. Esta base es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cilindro (calculada por las expresiones πd o $2\pi r$) y la altura es igual a la del cuerpo geométrico.

El **área total** de un cilindro recto que tiene una altura de h y un radio de r está dado por $2\pi r(h + r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, o bien, el perímetro del círculo por la altura más dos veces el área de uno de los círculos que forman la base.

Conoce más
Para una práctica de identificar prismas rectos mediante sus desarrollos planos, ingresa a http://www.edutics.mx/UA2. (Consulta: 20 de junio de 2018).

Problemas con desarrollos planos

Apliquemos lo aprendido sobre la obtención y análisis de los desarrollos planos de prismas y cilindros rectos.

6. Encierra en un círculo los arreglos de cuadrados de la figura 3.25 que corresponden al desarrollo plano de un cubo.

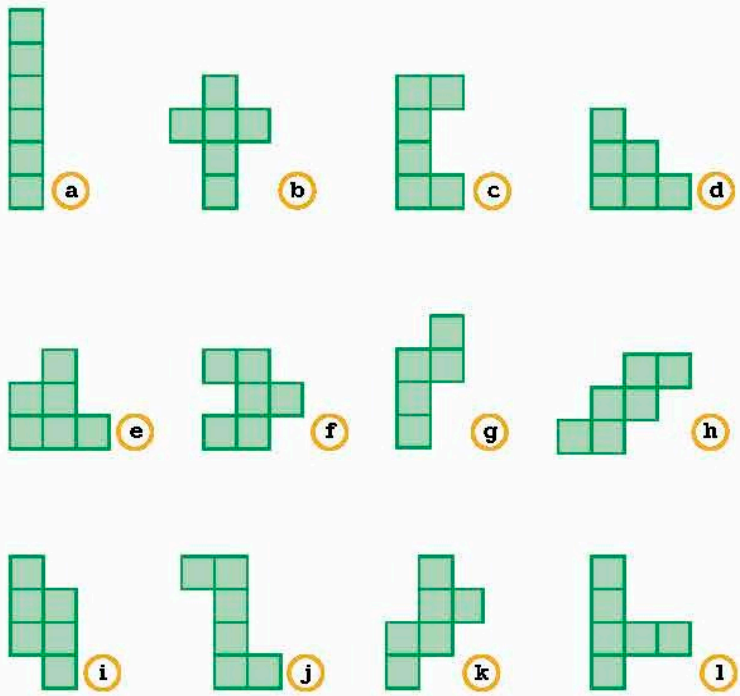


Figura 3.25. Arreglos de 6 cuadrados

7. Se tiene una caja con la forma y las dimensiones indicadas en la figura 3.26.

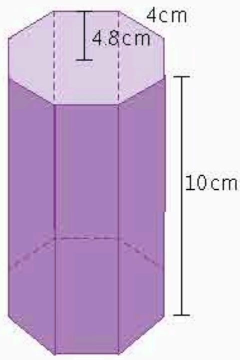


Figura 3.26

a) ¿Cuál es el área de cada uno de los rectángulos laterales del sólido? ____________
b) ¿Y la de cada uno de los octágonos regulares de las bases? ____________
c) ¿Cuál es el área total del prisma? ____________
d) ¿Cuánto vale su volumen? ____________
e) ¿El área del prisma se puede calcular como el perímetro de uno de los polígonos regulares por la altura, más dos veces el área del mismo polígono? Explica. ____________

8. En la figura 3.27 se muestra un desarrollo plano de una caja.

a) ¿Cual es el volumen de la caja una vez armada? ________________

b) Dibuja en tu cuaderno los desarrollos planos de otras cajas similares, pero que una tenga la mitad y la otra el doble de volumen de la caja de la figura 3.27.

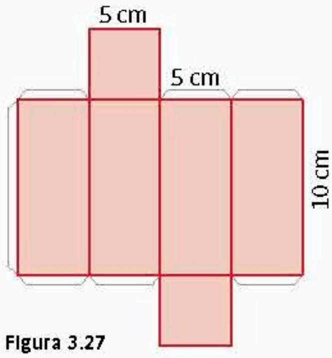


Figura 3.27

9. Se tienen dos desarrollos planos de cilindros (figura 3.28). ¿Cuál tiene mayor volumen al armarse? Explica. ________________

____

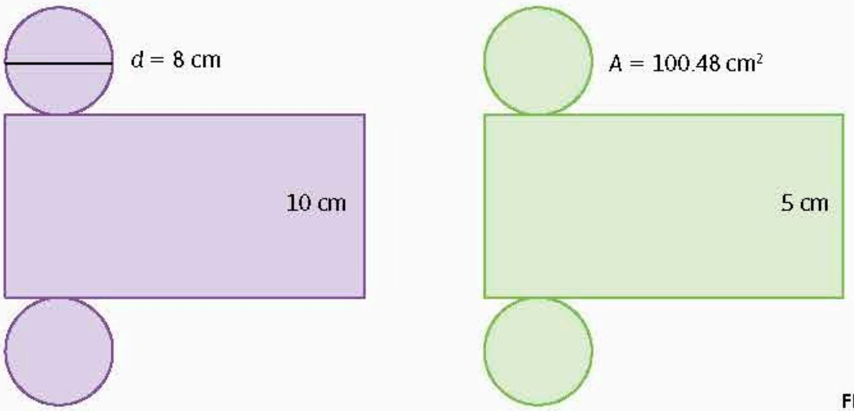


Figura 3.28

10. Reúnanse en equipo. Calculen los resultados que han obtenido para verificar su validez. Argumenten o corrijan según lo consideren necesario.

Portafolio P

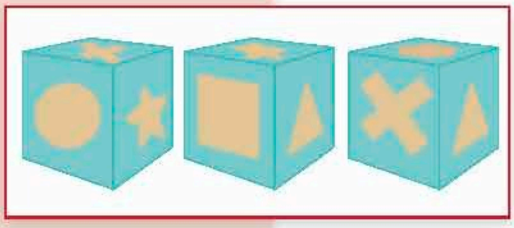
¿Reconoces las aplicaciones del uso de desarrollos planos de prismas y cilindros rectos? Elabora un cuadro sinóptico para explicarlas.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Mario es diseñador industrial y le han pedido diseñar dos envases para una marca nueva de jugo. Uno es un prisma hexagonal de lado 5 cm, apotema 4.3 cm y altura 9 cm; el otro es un cilindro de radio 2.5 cm y altura de 10 cm. Al realizar las cuentas de volumen, Mario piensa que la capacidad es casi la misma.
   a) ¿Mario está en lo correcto? Explica.
   b) Dibuja un esquema del desarrollo plano de cada envase y compara para comprobar su afirmación.
   c) ¿Cuál de los cuerpos tiene un área mayor? Explica.

Piensa y sé crítico

Observa estas tres vistas del mismo cubo.
¿Qué símbolo hay en la cara opuesta a la que tiene la cruz?
¿Y en la cara opuesta a la que tiene la estrella?
¿Y en la cara opuesta a la que tiene el triángulo?
Realiza el desarrollo plano del cubo y muéstralo a tus compañeros.



ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) propuso en el siglo XVII un procedimiento para calcular de áreas y volúmenes de figuras. Antes de este siglo sólo se podía calcular el volumen de algunos cuerpos especiales tratados ya por Arquímedes y Kepler.

LIBER II. 1?5

go prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura so-lida, A, ad figuram solidam, D, erit vt omnia plana, A, ad omnia plana, D, cum quibusuis regulis assumpta, quod & in figuris solidis ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

Liquet ex hoc, quod, vt inueniamus, quam rationem habeant inter se duæ figuræ planæ, vel solidæ, sufficiet nobis reperire, quam, in figuris planis, inter se rationem habeant earundem omnes lineæ, &, in figuris solidis, earundem omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta, quod nouæ huius meæ Geometriæ veluti maximum iacio fundamentum.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI duæ figuræ planæ, vel solidæ, in eadem altitudine fuerint constitutæ, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris solidis ductis planis vtcumque inter se parallelis, quorum respectu prædicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portiones figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis in eadem figura semper existentibus, dictæ figuræ erunt inter se, vt vnum quodlibet eorum antecedentium, ad suum consequens in alia figura eidem correspondens.

Sint primò duæ figuræ planæ in eadem altitudine constitutæ, C A M, C M E, in quibus duæ vtcunque rectæ lineæ inuicem parallelæ ductæ intelligantur, A E, B D, respectu quarum communis altitudo assumpta intelligatur, sint autem portiones figuris interceptæ ipsæ, A M, B R, in fig. C A M, &, M E, R D, in fig. C M E, reperiatur autem, vt, A M, ad, M E, ita esse, B R, ad, R D. Dico figuram, C A M, ad figuram, C M E, esse vt, A M, ad, M E, vel, B R, ad, R D, quoniam enim, B D, A E, vtcumq; ductæ sunt inter se æquidistantes, patet, quod quælibet earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, C A M, sumptæ regula altera ipsarum,

P 2 A M,

Fuente: http://edutics.mx/wh8 (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

El principio de Cavalieri

Cavalieri expuso su principio en dos publicaciones: *Geometria indivisibilibus* (1635) y *Exercitationes Geometricae* (1647).

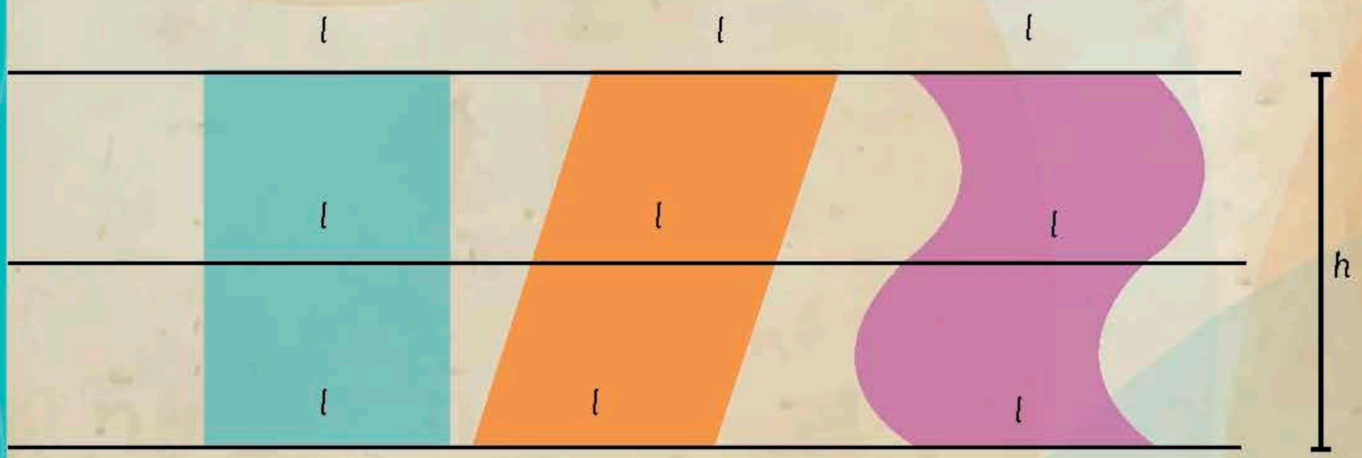
El principio general de Cavalieri dice que:

Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura y las secciones hechas por rectas paralelas (planos paralelos en caso de sólidos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las figuras planas (o los sólidos) están también en la misma razón.

Principio de Cavalieri para figuras planas

En lenguaje moderno, podemos enunciar el principio de Cavalieri para figuras planas de la siguiente manera:

Si dos figuras planas al ser cortadas por líneas rectas paralelas producen siempre segmentos de igual longitud l, entonces, tienen la misma área A.

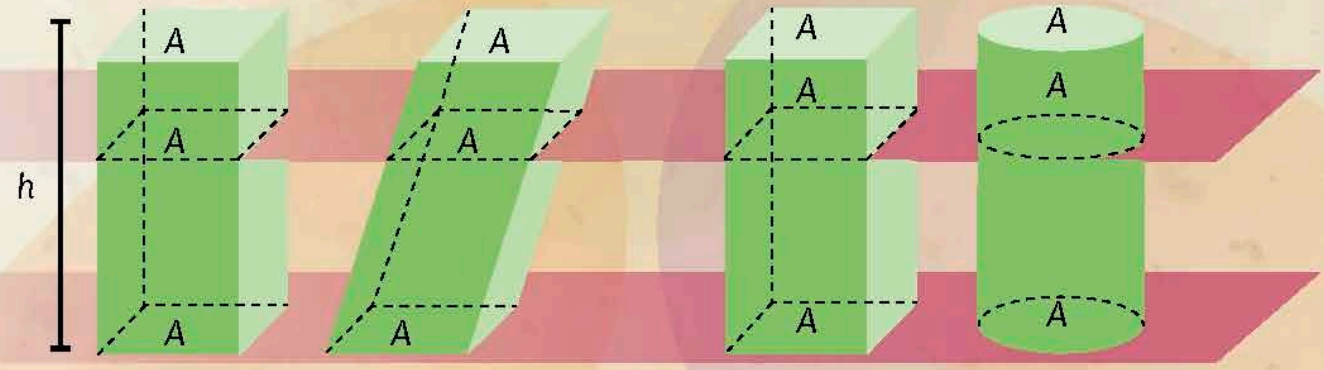


Las tres figuras planas tienen la misma área **A**.

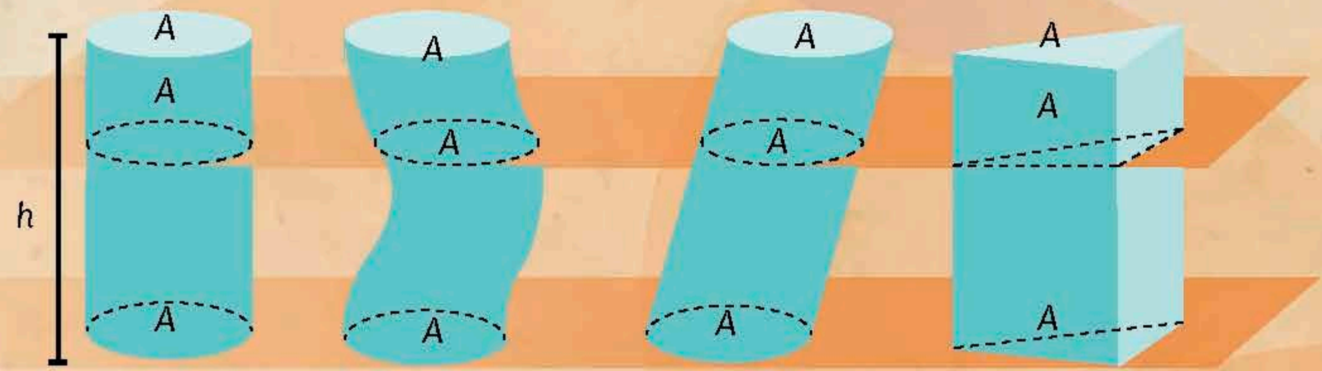
Principio de Cavalieri para figuras sólidas

En lenguaje moderno, podemos enunciar el principio de Cavalieri para figuras sólidas de la siguiente manera:

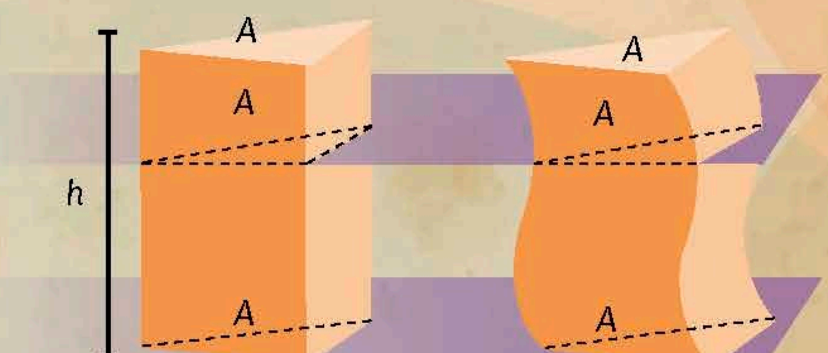
Si dos figuras sólidas de la misma altura al ser cortadas por planos paralelos producen siempre secciones de igual área *A* entonces tienen el mismo volumen *V*.



Todas las figuras sólidas tienen el mismo volumen V.



Todas las figuras sólidas tienen el mismo volumen V.



Analiza y resuelve.

- ¿Cómo podrías mostrar el principio de Cavalieri con diversos envases y líquido?
- ¿Cómo calcularías el volumen de un poliedro oblicuo? ¿Y el de un cilindro oblicuo?

S24 Probabilidad teórica

Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

L1 Definición de probabilidad teórica

Inicio

Infomáticas

El dado tetraédrico y otros con formas de poliedros regulares se utilizan en los juegos de rol, en los cuales los participantes actúan como personajes de historia o fantasía.

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
   Tres amigos juegan a avanzar casillas en un tablero, utilizando un dado de cuatro caras como el de la figura, cuyo resultado al lanzarlo es el número que aparece en la cúspide. Los lanzamientos que han realizado son: 3, 1, 4, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 1, 2, 3, 1.
   a) ¿Cuál consideras que es el número que podría salir en la siguiente tirada? Explica la razón.
   b) ¿Cómo calculas la probabilidad frecuencial de obtener cada número del dado?
   c) De acuerdo al experimento, ¿todos los números tienen la misma probabilidad frecuencial? Argumenta.
   d) Si tomas en cuenta las veces que se muestran los números en el dado, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 4?
   e) ¿Los números tienen la misma probabilidad de salir en este caso? Explica.
   f) ¿Qué información ha sido relevante para responder? ¿Qué información te falta?
2. Reúnanse en equipo. Verifiquen sus resultados a fin de comparar otras maneras de determinar la probabilidad de un evento.

Desarrollo

Definición de probabilidad teórica

En primer grado se calculó la probabilidad de un evento repitiendo muchas veces experimentos aleatorios, contando las veces que sucedía el evento deseado y se dividía ese conteo entre el número de ensayos o experimentos aleatorios.

1. Reúnanse en equipos. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. Analicen la situación.
   Paula y Alonso lanzaron volados, cada uno con una moneda y registran con una A las veces que obtuvo águila y S si fue sol. Se preguntan cuáles serán las opciones que hay al lanzar cada uno su moneda al mismo tiempo.
   a) ¿De cuántas maneras distintas cae la moneda de Paula? ¿Cuáles son sus resultados?
   ____
   b) ¿Cuántos y cuáles resultados arroja la moneda de Alonso? ______________________________
   ____
   c) ¿Qué combinaciones posibles se forman al lanzar las dos monedas?
   ____
   d) Completen el diagrama de la figura 3.29.

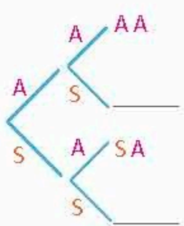


Figura 3.29. Resultados posibles en volados.

e) De acuerdo con el diagrama, ¿cómo escriben la probabilidad de que en ambas monedas se obtenga "águila"? Expliquen. ____________________

____

Conoce más

Te recomendamos el texto *El libro de la economía*, de Niall Kishtainy, en él conocerás los principios básicos de esta disciplina y su relación con las matemáticas. Búscalo en tu biblioteca del aula.

2. Paula y Alonso decidieron jugar al "disparejo" lanzando sus monedas. Si los resultados son diferentes, Paula gana, y si las monedas caen iguales, Alonso gana.

a) ¿Cuáles resultados hacen ganar a Paula? ____________________

b) ¿Con cuáles resultados gana Alonso? ____________________

c) ¿Cómo determinan la probabilidad de que Paula gane en un volado?

____

d) ¿Qué probabilidad tiene Alonso de que el primer volado sea a su favor? Argumenten cómo obtenerla. ____________________

____

e) Un juego se considera justo si las probabilidades de que ganen sus participantes son las mismas. ¿Este juego es justo? Expliquen. ____________________

____

3. Gabriel llegó con Paula y Alonso. También traía una moneda, así que se preguntaron cómo jugar un disparejo con tres monedas. Gabriel propuso que si las monedas caían disparejas ganara Paula, pero si caían todas parejas (esto es, tres águilas o tres soles), ganara Alonso.

a) Tracen en su cuaderno un diagrama de árbol con los resultados posibles de los tres volados.

b) ¿Cuántos resultados posibles hay? ____________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Paula con las reglas de Gabriel? ¿Por qué? ____

____

d) Con las reglas de Gabriel, ¿cuál es la probabilidad de que gane Alonso? Expliquen.

____

____

e) ¿Este juego es justo? Argumenten. ____________________

____

f) Propongan una manera de que el juego con tres monedas sea justo y muestren por qué lo es. ____________________

____

____

g) Propongan otra manera de jugarlo, que incluya a Gabriel y sea justo. Expliquen por qué lo es. ____________________

____

4. Jimena y Eduardo se han añadido al grupo y traen dos dados, por lo que todos van a jugar con ellos a avanzar en un tablero, de acuerdo con los puntajes que se

Tabla 3.23. Avance de juego con dos dados		
Suma de los dados	Persona que avanza	Casos en que sale
2 o 12	Paula	
3 o 11	Alonso	
4 o 10	Jimena	
5 o 9	Eduardo	
6 u 8	Gabriel	
7	Vuelven a tirar	

muestran en la tabla 3.23. Cada que un resultado sea favorable para alguien, avanza una casilla; el que llegue primero a 10 casillas, gana.

a) Completen la tabla 3.23 considerando los resultados posibles de cada suma de los dados.

b) Realicen tres partidas. Usen la tabla 3.24 como tablero para avanzar. Hagan turnos para lanzar dos dados y usen fichas, piedritas, granos u otro objeto para avanzar. Registren en su cuaderno cada resultado de los dados.

Tabla 3.24. Tablero de avance										
Jugador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Paula										
Alonso										
Jimena										
Eduardo										
Gabriel										

c) Reflexionen: ¿todos los resultados tuvieron la misma posibilidad de ocurrir? Escriban sus conclusiones al respecto. ______

d) ¿Cuál fue el resultado con mayor frecuencia? Expliquen. ______

Infomáticas

Los juegos de mesa ya existían desde la prehistoria, incluso se consideran anteriores a la invención de la escritura. ¿Y cuál fue el primer juego creado? ¡Los dados! Fuente: http://www.edutics.mx/wnE (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

e) Como anotaron todos los resultados que fueron obteniendo, encuentren las probabilidades frecuenciales que cada uno tiene de ganar. ______

f) Tracen en su cuaderno un histograma y un polígono de frecuencias con las veces que salió cada resultado de los dos dados.

g) ¿Qué relación hay entre la probabilidad y las gráficas que dibujaron? ______

h) Reúnanse con otros equipos. Comparen sus resultados y razonen el significado de la probabilidad teórica de un evento aleatorio. Argumenten y corrijan si es necesario. Escriban una conclusión. ______

Los **resultados favorables** son las veces en que se obtiene el caso deseado en un evento aleatorio. Por ejemplo, en un dado numerado del 1 al 6, si el caso deseado es: "Obtener número par", los resultados favorables son 3: el 2, el 4 y el 6.

Si todos los resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir, la **probabilidad clásica** (o **teórica**) se calcula contando el número de resultados favorables y dividiéndolo entre el número de resultados totales. Por ejemplo, la probabilidad de obtener "águila" al lanzar una moneda es

$$P(x) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de resultados totales}} = \frac{1}{2}$$

Conoce más

Para observar una definición y ejemplo breve sobre la probabilidad teórica, entra a la liga: http://www.edutics.mx/U2T. (Consulta: 20 de junio de 2018).

5. Completa la tabla 3.25 con los casos totales de cada experimento y las probabilidades teóricas de cada evento deseado.

Tabla 3.25. Probabilidades teóricas de eventos

Evento	Casos favorables	Casos totales	Probabilidad teórica
Obtener 5 en un dado de 6 caras			
Escoger a un compañero del salón que traiga zapatos blancos			
Elegir un as de una baraja			
Que la última cifra del número de alumnos de la escuela sea mayor que 7			
Sacar el 13 en una urna con bolas numeradas del 1 al 20			
Elegir a un compañero cuyo apellido empiece con F			

a) Reúnanse en equipo. Calculen las probabilidades teóricas y verifiquen su procedimiento de obtención. Argumenten y corrijan en caso necesario.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Hay tres urnas, una con una bola roja, otra con una verde y la tercera con una bola blanca. Sin saber dónde está cada una, eliges una urna.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga la bola roja?
   b) Supón ahora que metes las tres bolas a una sola urna y tomas una de ellas al azar, sin verla. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la roja?
   c) Piensa que ahora toma 3 bolas rojas, 2 verdes y 6 blancas, y las metes todas en una urna, para luego sacar una sin mirarla. ¿Qué probabilidad hay de que tomes una bola roja?

L2 Probabilidad teórica y frecuencial

Inicio

1. Analiza la situación, observa la imagen y responde.
   Fernando y sus amigos participan en un juego de mesa en el que se lanza un dado como el de la figura. Él ganará si obtiene 6 en el próximo tiro, pero piensa que es más difícil obtener este número que los demás.
   a) De 50 lanzamientos, 11 han caído en el número 1; 7 en el 2; 9 en el 3; 9 en el 4; 8 en el 5 y el resto en el 6. Escribe la probabilidad de cada número de acuerdo con los lanzamientos.
   b) Reúnanse en equipo y reflexionen: ¿cómo determinan la probabilidad de cada número de acuerdo con el número de caras del dado? Calculen la probabilidad de cada caso.
   c) ¿En cuál inciso usan la probabilidad teórica? ¿En qué caso se utiliza la probabilidad frecuencial? Expliquen.
   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   e) Describan los procedimientos realizados para obtener la probabilidad de cada número del dado.

2. Reúnanse con otros equipos. Expresen las características de la probabilidad teórica de un evento, así como su relación con la probabilidad frecuencial. Argumenten o corrijan sus resultados si es necesario.

Desarrollo

Probabilidad teórica y frecuencial

Después de definir la probabilidad teórica, verifiquemos la relación con la probabilidad frecuencial.

1. Reúnanse en equipos. Observen las urnas que aparecen en la figura 3.30 y contesten lo que se les pide.

Figura 3.30. Urnas con pelotas de diferentes colores.

a) Si sacan una bola de la primera urna, ¿cuál color es más probable que obtengan? Expliquen. ____________________

____

b) Calculen las probabilidades de sacar una bola verde, una roja y una blanca de cada urna. ____________________

____

c) Si quieren tomar una bola verde, ¿qué urna elegirían? Expliquen. ______

______

d) Supongan que sacan una bola verde de la tercera urna y no la regresan, lo que se conoce como extracción sin reemplazo. ¿Qué probabilidad tiene cada bola de salir en la siguiente extracción? ______

______

e) Comparen las probabilidades de los incisos b) y d). Reflexionen: ¿cómo se modifican los valores en casos con reemplazo y sin él? ______

______

f) Escriban en su cuaderno algunas situaciones donde se aplique la probabilidad con reemplazo y otras donde la probabilidad sea sin reemplazo.

g) ¿Qué tipo de probabilidad se está aplicando para responder estas preguntas? Expliquen. ______

______

Notación

En una situación de probabilidad sin reemplazo, un elemento que ya se obtuvo no se considera en la siguiente repetición del evento aleatorio. Si se toma en cuenta, se tiene una probabilidad con reemplazo. Estos dos conceptos son importantes para comparar dos o más repeticiones del evento y así calcular sus probabilidades en conjunto.

2. Reunidos en equipos, desarrollen de manera real este experimento. Busquen pelotas o canicas de colores rojo, verde y blanco, con los números de las urnas anteriores, así como 3 recipientes opacos (cajas, bolsas o botellas de plástico cubiertas) que sean esas urnas. Tomen turnos para sacar al azar una bola de cada urna, registrando su color y regresándola a la urna, es decir, con reemplazo.

a) Realicen 60 veces el experimento para cada urna. Completen la tabla 3.26 con los resultados obtenidos. Respondan lo que se pide en su cuaderno.

Tabla 3.26. Registro de repeticiones del experimento

Urna	Verde		Rojo		Blanco	
	Veces que sale	Probabilidad	Veces que sale	Probabilidad	Veces que sale	Probabilidad
1						
2						
3						

b) Si sacan una bola de la segunda urna, ¿cuál color será más factible que tomen? Expliquen.

c) Calculen las probabilidades de extraer una bola verde, una roja y una blanca de cada urna.

d) Si quieren tomar una bola roja, ¿qué urna elegirían? Argumenten.

e) Hagan las extracciones de la tercera urna sin reemplazo. Reflexionen sobre lo que observan y escriban al respecto.

f) ¿Qué probabilidad están aplicando en el experimento? Expliquen.

Portafolio

¿Cuántas veces tendrías que hacer un experimento para que las probabilidades teórica y frecuencial fueran iguales? Escribe tus conclusiones al respecto.

La **probabilidad frecuencial** se calcula con la división de las veces que salió el resultado deseado entre el total de repeticiones de un experimento.

3. Hagan otras 60 repeticiones del experimento en cada urna y completen la tabla 3.27 con la probabilidad teórica (PT), la probabilidad frecuencial de las primera 60 veces (PF 60) y la probabilidad frecuencial de las 120 repeticiones totales (PF 120).

Tabla 3.27. Comparación de probabilidades

	Verde			Rojo			Blanco		
Urna	PT	PF 60	PF 120	PT	PF 60	PF 120	PT	PF 60	PF 120
1									
2									
3									

a) ¿Qué relación observan entre la probabilidad teórica de cada color en cada urna y la probabilidad frecuencial de 60 experimentos?

b) ¿Cómo es la relación entre las probabilidades teórica y frecuencial de 120 repeticiones?

c) Si aumentaran el número de repeticiones del experimento para cada urna, ¿qué sucedería con los valores de las probabilidades teórica y frecuencial? Realicen una conjetura al respecto y escríbanla.

d) De acuerdo con lo observado, anoten la relación que se tiene entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.

e) Reúnanse con otros equipos. Revisen sus resultados a fin de explicar la relación de la probabilidad teórica con la probabilidad frecuencial. Argumenten y corrijan en caso necesario.

Infomáticas

Jakob Bernoulli estableció la relación entre las probabilidades frecuencial y teórica. Antes que él, Cardano, Pascal, Fermat y Huygens realizaron aportaciones sobre dicha relación.
Fuente: http://www.edutics.mx/wnz (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

Si se repite un experimento aleatorio un número grande de veces, la **probabilidad frecuencial** o **experimental** se acerca al valor de la **probabilidad teórica** o **clásica**.

Problemas de probabilidades frecuencial y teórica

Apliquemos el cálculo de la probabilidad teórica y su relación con la probabilidad frecuencial.

4. Reúnanse en equipos a fin de llevar a cabo un juego propuesto por el matemático Daniel Bernoulli. Uno de ustedes coloque en un recipiente opaco un cierto número de canicas verdes y otras de otros colores, sin que los demás lo vean. Luego, tomen turnos para sacar una canica y registren si es verde o no; regresen la canica a la urna y repitan el experimento.

Tabla 3.28. Juego de Bernoulli

Repeticiones del experimento	Frecuencia del color verde	Probabilidad frecuencial
50		
100		
200		
300		

a) Completen la tabla 3.28.

b) Después de realizar las repeticiones, escriban las siguientes cantidades.

- El total de canicas en el recipiente. ____________________
- El número de canicas verdes en el recipiente. ____________
- La probabilidad teórica de sacar una canica verde de la urna.

____

c) Describan un procedimiento para estimar el número de canicas verdes en la botella sin contarlas. Considera las probabilidades frecuenciales del experimento.

____

____

d) ¿Qué tan cercanos fueron los valores de las probabilidades frecuencial y teórica? Expliquen. ____

____

e) En algunas situaciones, tales como la probabilidad de que llueva en un lugar o de determinar si una especie de chícharo posee ciertos genes, se utiliza este procedimiento frecuencial. Discutan otros casos de la aplicación de este método y escríbanlos. ____

____

Conoce más

Entra a la página: http://www.edutics.mx/U8K. En ella encontrarás una explicación sobre la diferencia entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica. (Consulta: 20 de junio de 2018).

5. Se tiene una urna con los números que aparecen en la figura 3.31.

a) Calculen las probabilidades teóricas de los eventos.

- El número es múltiplo de 3. ______________________
- Se obtiene un número par. ______________________
- Resulta un número menor que 100. ______________________
- El número contiene al menos un 5. ______________________
- La suma de sus cifras es menor o igual a 9. ______________________

b) Reúnanse en equipos. Razonen sobre las situaciones en las que se aplica la probabilidad teórica y en las que se usa la probabilidad frecuencial. Argumenten y corrijan sus respuestas según sea necesario.

Figura 3.31. Bolas numeradas.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Sandra tiene una caja de crayones como los que se muestran en la figura. Ha trazado la bandera de México en un cartel y procederá a colorearla.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer crayón que tome sea un color de la bandera?

b) Si no regresa el crayón a su caja, ¿cuál será la probabilidad de que tome otro color de la bandera? Y si tampoco regresa este crayón, ¿cuál es la probabilidad del tercer crayón de ser otro color de la bandera?

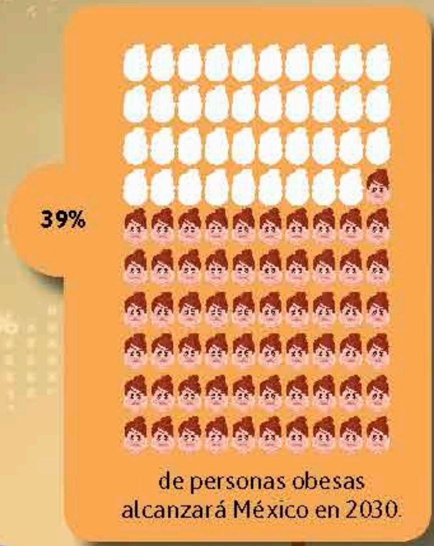
c) Si regresa los crayones a la caja, ¿cuál será la probabilidad en cada caso?

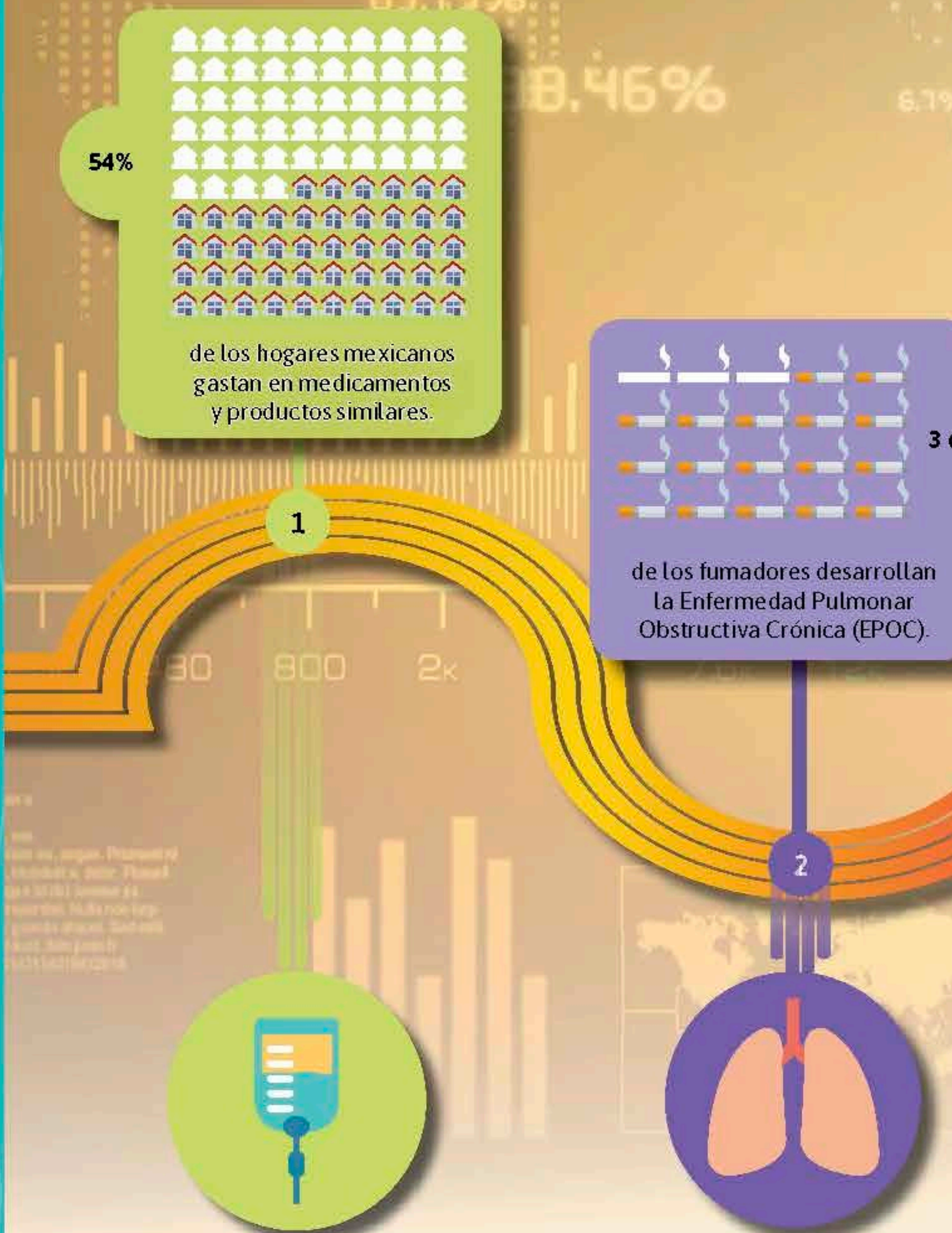
Piensa y sé crítico

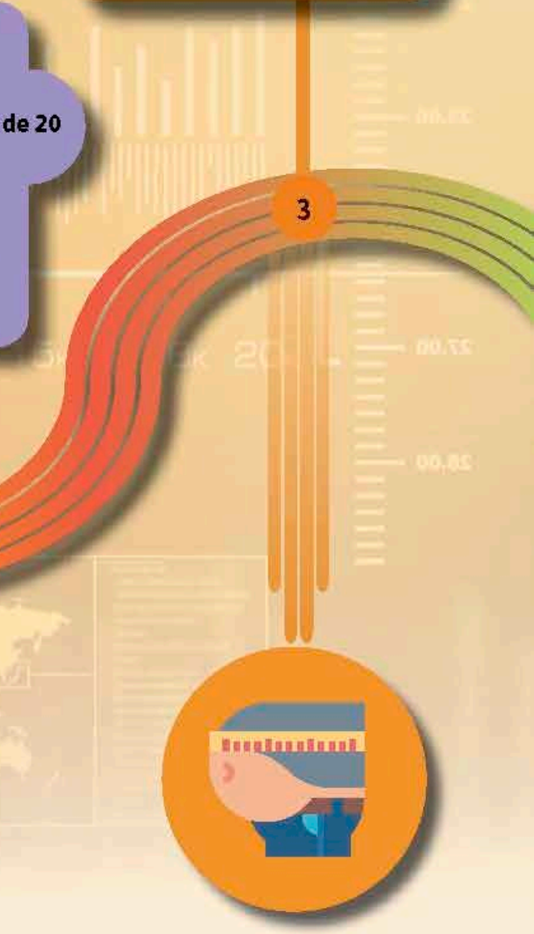
Un hecho respecto a la probabilidad es que cualquier valor de ella se ubica entre 0 y 1. ¿En qué casos la probabilidad es 0? ¿Cuándo una probabilidad vale 1? ¿Cómo explicas este hecho con las definiciones de las probabilidades frecuencial y teórica?

PROBABILIDAD Y SALUD

Los riesgos para la salud son posibilidades o probabilidades de que algo dañe o afecte de alguna manera tu salud. De hecho, “riesgo” no significa que algo malo maya a pasar, es sólo una posibilidad. A continuación se presentan algunos datos referentes a riesgos para la salud en México.







39%

de los casos tratados de diabetes se relacionan con el sobrepeso y la obesidad.

1 de 4

pacientes que sufre infarto agudo al miocardio (IAM) fallece.

4

5

Los riesgos de enfermedades están en todos lados; por ejemplo, un estornudo cercano puede aumentar el riesgo de contraer la gripe. Conocer los riesgos que tú y tu familia enfrentan puede ayudarles a encontrar maneras de evitar problemas de salud.

Fuentes:

1 http://archivo.eluniversal.com.mx/nacion/191153.html
2 http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/cn/salud/default.aspx
3 https://www.vanguardia.com.mx/articulo/para-2030-el-39-de-mexicanos-sera-obeso-alerta-la-ocde
1 https://medium.com/@dargaray/m%C3%A9xico-tenemos-que-pensar-en-el-coraz%C3%B3n-9a3781a50bc
1 https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/64176/INFORME_LA_SALUD_DE_LOS_MEXICANOS_2015_S.pdf

Analiza y resuelve

- ¿Cuál es la intención de presentar a la población en general datos estadísticos?
- ¿Cómo utilizarías información representada gráficamente para prevenir o combatir problemas de salud?

U3 Lo que aprendí

1. Explica con tus palabras los siguientes conceptos o procedimientos. Compara tus anotaciones con las de tus compañeros y, junto con tu profesor, verifiquen que sean correctas.

Concepto	Mi explicación	Ejemplo
Representación algebraica de la regla general de una sucesión	Es una fórmula que tiene como variable al lugar que ocupa el elemento en la sucesión.	$8-3n$, el lugar esta dado por n. El elemento que ocupa el lugar 14 en la sucesión es $8-3(14)=8-42=-34$
Equivalencia de expresiones de primer grado en sucesiones		
Equivalencia de expresiones algebraicas usando perímetros y áreas		
Volumen de prismas rectos		
Volumen de cilindros rectos		
Desarrollo plano de prismas rectos y cilindros		
Probabilidad teórica		
Relación entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica		

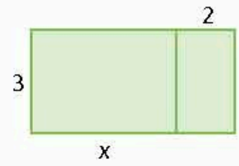
2. Escriban una expresión algebraica que exprese la regla general con la que se pueden obtener los términos de la siguiente sucesión, 14, 8, 2, −4, −10, ... Usen la letra n para representar el lugar de cada término. ________________

3. Indica si son equivalentes o no las siguientes expresiones y explica la razón.

a) $3n+1$ y $3(n+1)$ ________________

b) $0.5n-0.25$ y $\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)$ ________________

4. Con base en la figura siguiente, responde lo que se te pide.



a) Indica una equivalencia de dos expresiones algebraicas que describan su perímetro. Puede haber más de una respuesta. ______________________

____

b) Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes correspondientes a su área. Puede haber más de una respuesta. ______________________

____

5. Calcula el volumen de un prisma recto de altura 5 u, que tiene como base un endecágono regular (11 lados) con apotema de 6.8 y lado 4. ____________

6. Una caja en forma de un prisma recto hexagonal tiene altura de 4 cm, mientras que la base mide 7 cm de lado.

a) ¿Cuántos rectángulos forman su desarrollo plano? ____________

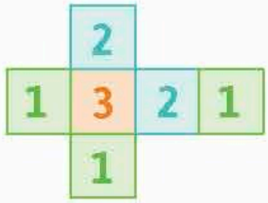
b) Calcula el área de cada rectángulo. ____________

c) Anota el área lateral del prisma. ____________

7. Un recipiente cilíndrico mide 6 cm de diámetro y 18 cm de altura. Calcula su volumen. ____________

a) Traza un esquema del desarrollo plano del recipiente.

8. Un dado para juego de mesa se arma como indica la figura. Después de varios lanzamientos, resultan los números: 1, 3, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2.



a) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que se obtenga el número 1 en el dado? ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener un 3? ____________

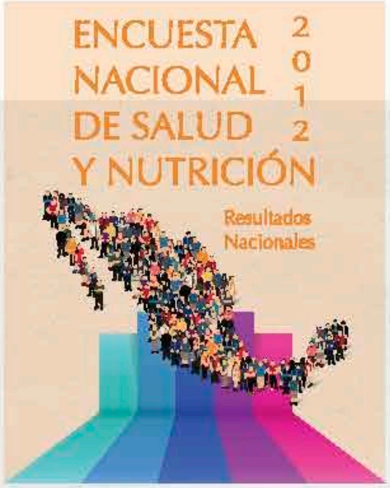
c) ¿De cuánto es la diferencia entre las probabilidades teórica y frecuencial para el número 2? ____________

9. Compara tus respuestas de toda la sección con las de tus compañeros. ¿Son correctas? ¿Tuvieron dificultades para responder o ejemplificar algún contenido? Compartan sus experiencias, argumenten sus respuestas y expliquen sus ejemplos. Repasen los contenidos que consideren necesario.

Estadísticas de salud en México

1. Lee lo siguiente:

Lamentablemente un gran porcentaje de la población mexicana no goza de bienestar actualmente. Si bien la mayoría de nosotros presentamos dolencias ocasionales (como gripe, jaqueca o un raspón, por ejemplo), miles de personas ven mermada su calidad de vida debido a condiciones que no sólo no desaparecen fácilmente, sino que también pueden agravarse con el tiempo. Según la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012 del total de los adultos en México: 71.28% padecen sobrepeso u obesidad, 31.5% padece hipertensión, 9.2% han sido diagnosticados con diabetes (aunque podría haber el doble, pues muchos desconocen su condición), 47.3% no realiza actividad física (sedentarismo), 11.8% son adictos al tabaco, 53.9% consumen alcohol cotidianamente y, finalmente, 1.2% ha tenido alguna lesión causada por un accidente de tránsito. Seguro habrás notado que estos datos son escalofriantes, pero afortunadamente la mayoría de los padecimientos pueden ser prevenidos tomando las medidas correctas.



La Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012 (Ensanut 2012) actualiza la información que genera el Sistema Nacional de Encuestas de Salud puesto en marcha desde 1986.
https://ensanut.insp.mx/index.php

Bienestar
El bienestar no sólo se refiere una sensación o estado de ánimo sino también a nuestra capacidad para cuidar de nuestro cuerpo y mente. Es decir, se relaciona con la responsabilidad que tenemos de mantenernos sanos (física, mental e incluso socialmente) mediante acciones que faciliten el control de factores potencialmente nocivos.

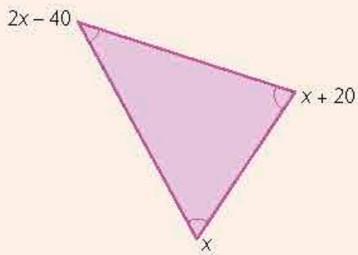
Una estrategia
Para mantener nuestro bienestar es necesario hacer conciencia de aquellos factores que pueden dañarnos y realizar acciones que contribuyan a mejorar o mantener nuestra salud. El primer paso es hacernos conscientes de los padecimientos que podemos sufrir, actualmente o en un futuro, y de su relación con nuestro estilo de vida. Posteriormente podemos planificar actividades y estrategias que nos ayuden a evitarlos y, finalmente, debemos llevarlas a cabo de manera sostenida.

2. Haz conciencia. Investiga si entre los adultos de tu familia existen personas que padezcan alguna de las condiciones mencionadas anteriormente.
   a) En grupo, registren los datos en una tabla. Consideren el número de personas investigadas (intentos) y el número de personas que padece cada condición (eventos). ¿Qué probabilidad experimental hay de que una persona padeciera una de las afecciones mencionadas al inicio? ¿Existe alguna diferencia entre la probabilidad experimental que obtuviste y los datos presentados al inicio de la actividad? ¿Cuál?
3. Reúnanse en equipo. Elijan alguna condición de la mencionadas al inicio e investiguen acerca de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga ese padecimiento en México? ¿Qué pueden hacer para prevenirlo? Propongan tres acciones que permitan mantener o mejorar la salud. Compartan sus investigaciones al grupo.

Nombre: ______________________ Fecha: ________ Grupo: ________

Subraya la opción correcta.

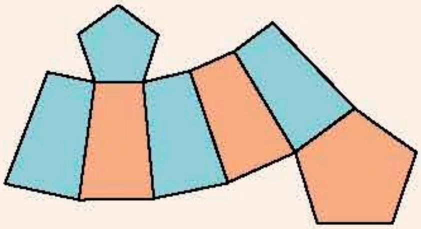
1. ¿Cuál es la regla general que describe a la sucesión: $-12, -11, -10, -9, -8, \ldots$?
   a) $12 - n$
   b) $-12 - n$
   c) $-12 + (n - 1)$
   d) $12 - (n + 1)$
2. ¿Cuál es la regla equivalente a $4 - 5n$?
   a) $-5(n - 4)$
   b) $-1 - 5(n - 1)$
   c) $4 - 5(n - 1)$
   d) $1 - 4(n - 1)$
3. En un polígono regular de 10 lados se tiene que la longitud de la apotema está denotada por a y la longitud del lado por l. ¿Qué fórmula es la que indica el cálculo del área de ese polígono?
   a) $10(a + l)$
   b) $5(al)$
   c) $10(al)$
   d) $5(a + l)$
4. Indica la expresión algebraica que no es equivalente a $2(x - 2) + 3(2x + 2)$
   a) $2(4x + 1)$
   b) $3(3x + 6) - (x + 4)$
   c) $4(2x - 1)$
   d) $8x + 2$
5. La expresión que representa la suma de los ángulos internos del triángulo es:
   a) $2x + 20 + x + 20$
   b) $4x - 20$
   c) $2x - 40 + x + 20$
   d) $x - 40$

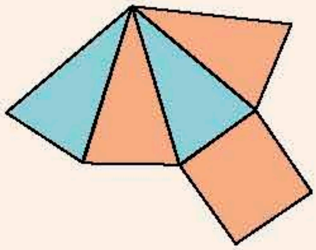


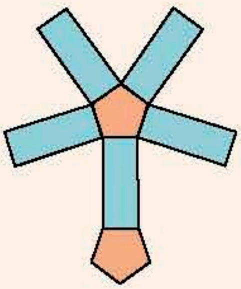
Con la siguiente información responde las preguntas 6 a 8.
En la imagen se aprecia un mobiliario de un parque hecho con cilindros. Cada asiento es un cilindro de 25 cm de radio y 80 cm de altura, el cual se corta por el diámetro y a la mitad de la altura. La mesa es un cilindro del mismo radio y 2.1 m de altura.

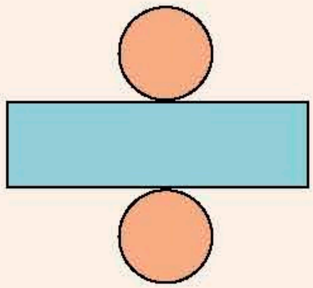
6. ¿Qué volumen tiene un cilindro del asiento antes de ser cortado?
   a) $157\,000 \text{ cm}^3$
   b) $50\,000 \text{ cm}^3$
   c) $25\,000 \text{ cm}^3$
   d) $628\,000 \text{ cm}^3$

7. ¿Qué volumen tiene cada asiento?
   a) 18 750 cm³
   b) 117 750 cm³
   c) 157 000 cm³
   d) 37 500 cm³
8. ¿Cuál es el volumen de la mesa?
   a) 4121.25 cm³
   b) 157 000 cm³
   c) 412 125 cm³
   d) 6 280 cm³
9. ¿Cuál de los siguientes desarrollos planos corresponde al de un prisma recto?

a)


c)


b)


d)


10. ¿Cuál es la probabilidad teórica de obtener un 5 en un dado como el de la figura?
   a) $\frac{5}{6}$
   b) $\frac{1}{6}$
   c) $\frac{5}{12}$
   d) $\frac{1}{12}$

Dado de 12 caras

Reflexiono sobre mi desempeño

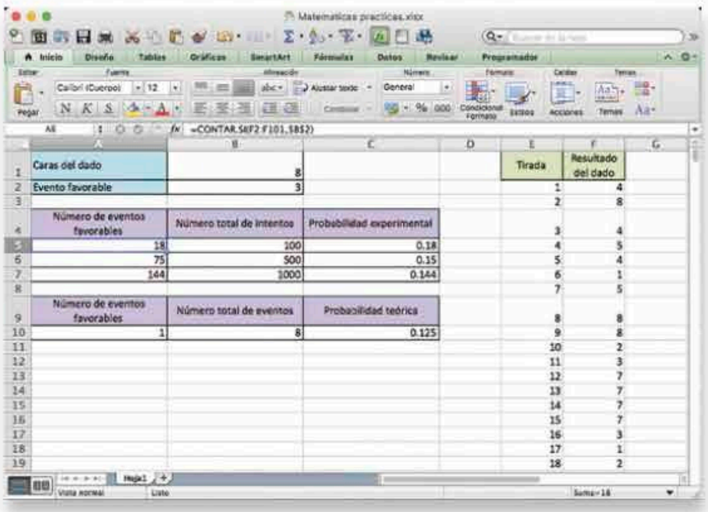
Coevaluación. Reúnete con un compañero para compartir y validar sus respuestas.

Heteroevaluación. Guiados por su maestro, revisen las secuencias que estudiaron en la unidad para identificar cuáles temas comprendieron mejor y en cuáles tuvieron dificultades. Propongan una estrategia de trabajo para favorecer su aprendizaje.

Probabilidad teórica de un evento aleatorio

En esta actividad calcularemos la probabilidad frecuencial y teórica de obtener un resultado n en un dado equiprobable de 4, 6, 8, 12 o 20 caras usando una hoja de cálculo tal como Excel, con la intención de mostrar el acercamiento entre ambas probabilidades al aumentar el número de experimentos.

1. Abre la hoja de cálculo y escribe en las celdas que se indican: A1, "Caras del dado"; A2, "Evento favorable"; A4, "Número de eventos favorables"; "B4, Número total de intentos"; "C4, Probabilidad experimental"; A7, "Número de eventos favorables"; B7, "Número total de eventos"; C7, "Probabilidad teórica"; E1, "Tirada"; y en F1, "Resultado del dado".
2. Ahora asignaremos valores. En B1 escribe el número de caras del dado, por ejemplo, 8. En B2 escribe el número del dado que elijas como evento favorable, por ejemplo, 3.
3. Ahora simularemos los resultados de 1 000 tiradas del dado. En E2 escribe 1 y en E3, "=E2+1", y luego copia esta celda desde E4 hasta E1001 (1 000 tiradas). Luego en F2 escribe la función "=ALEATORIO.ENTRE(1,B1)" y copia esta fórmula desde F3 hasta F1001.
4. Ahora usaremos las fórmulas CONTAR y CONTAR.SI para calcular las probabilidades experimentales para 100, 500 y 1 000 intentos. Para contar el número de eventos favorables, en A5 escribe "=CONTAR. SI(F2:F101,B2)", en A6, "=CONTAR.SI(F2:F501,B2)" y en A7 "=CONTAR.SI(F2:F1001,B2)". Para contar el número total de intentos, en B5 escribe "=CONTAR(F2:F101)", en B6 "=CONTAR(F2:F501)" y en B7 "=CONTAR(F2:F1001)". Luego, escribe en C5 "=A5/B5", en C6 "=A6/B6" y en C7 "=A7/B7".
5. Ahora calcularemos la probabilidad teórica. En A8 escribe 1, que es el número de eventos favorables, en B8, "=B1", que es el número total de eventos y en C8, "=A8/B8", para calcular la probabilidad teórica. Por último, puedes dar formato a las celdas para presentar mejor y con más claridad los datos.



6. ¿Por qué 1 es el número de eventos favorables? ¿Por qué el número total de eventos corresponde al número de caras del dado?
7. ¿Qué observas con respecto a los valores de las probabilidades experimental y teórica? ¿Qué ocurrirá si aumentas el número de intentos? Modifica las fórmulas de la hoja para considerar 5 000, 10 000 y 50 000 intentos. Escribe una conclusión acerca de los valores de las probabilidades experimental y teórica y qué tan cercanos pueden ser entre sí.

Haz una tabla similar en tu cuaderno. Complétala con las expresiones que corresponden a cada concepto de cada tema. También escribe una situación donde apliques la expresión.

Eje: Número, álgebra y variación			
Tema	**Concepto**	**Expresión/simbolización**	**Aplicación**
Multiplicación y división	Producto de potencias con una misma base		
	Potencia de potencia		
	Cociente de potencias de la misma base		
	Exponente negativo		
Funciones	Expresión de una variación inversa		
Eje: Forma, espacio y medida			
Tema	**Concepto**	**Expresión/simbolización**	**Aplicación**
Figuras y cuerpos geométricos	Número total de diagonales de un polígono		
	Ángulo central de un polígono regular		
	Ángulo interior de un polígono regular		
Magnitudes y medidas	Área de un polígono regular		
	Área de un círculo		
	Volumen de un prisma recto		
	Volumen de un cilindro		
Eje: Análisis de datos			
Tema	**Concepto**	**Expresión/simbolización**	**Aplicación**
Estadística	Desviación media		
Probabilidad	Probabilidad teórica		

Bibliografía recomendada para el alumno

Ávila, Alicia y Silvia García Peña, *Los decimales: más que una escritura*, México, INEE, 2008 (Colección Materiales para apoyar la práctica educativa).

Block, David, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez, *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, SM-Cinvestav, 2010.

Bosch, Carlos, *El cero*, México, SEP-Nuevo México, 2005 (Colección Libros del Rincón).

Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana, 2003 (Biblioteca juvenil ilustrada).

Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana a las formas*, México, Santillana, 2003 (Biblioteca juvenil ilustrada).

Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana al infinito*, México, Terracota, 2011.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana a la incertidumbre*, México, Santillana, 2003 (Biblioteca juvenil ilustrada).

Campos, Mario, *Andrés y el dragón matemático*, Madrid, Laertes, 2007.

Cerasoli, Anna, *La sorpresa de los números*, Madrid, Maeva, 2006.

Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 2016.

Gardner, Martin, *Acertijos matemáticos*, México, Selector, 2000.

Hernández, Antonio, *Matemáticas y deportes*, México, Santillana, 2003.

Lam, Emma y Elena de Oteyza, *El álgebra es divertida*, México, SEP-Santillana, 2009.

Perelman, Yakov, *Matemática recreativa*, Barcelona, Martínez Roca, 2000.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, SEP-Limusa Noriega, 2002.

Bibliografía recomendada para el profesor

Ávalos Rogel, Alejandra y R. Rebolledo, *La organización discursiva en el aprendizaje de la geometría de secundaria en contextos computacionales. Memoria del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, México, Consejo Mexicano de Investigación Educativa, 2003.

Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Santillana, 2005.

Butto, Cristianne y Teresa Rojano, *Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría*, Educación Matemática, vol. 16, México, Cinvestav, 2004.

Dolciani, Mary P. *et al.*, *Matemáticas modernas para escuelas secundarias, vol. 2*, México, Publicaciones Cultural, 1969.

Fluckiger, Annick y Jean Brun, *Conceptualisation et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure, Recherches en didactique desmathématiques [Conceptualización y clases de problemas en el concepto de la medida, Investigación en didáctica de las matemáticas], vol. 25*, núm. 3, París, La Penseé Sauvage Editions, 2005.

Mochón, Simón y Josueth Vázquez, *Cálculo mental y estimación. Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza*, vol. 7, núm. 3, México, Revista Educación Matemática, 1995.

Sánchez, C. *et al.*, *La medición como medio para el tránsito de las estructuras numéricas a las estructuras algebraicas*, Revista ENSM, vol. 3, núm. 7, México, Escuela Normal Superior de México, 2018.

Sitios de internet recomendados

En este sitio web se ofrece una amplia gama de materiales digitales educativos.

http://red.ilce.edu.mx/sitios/pensa_logico/index.html

En este sitio web se trabaja la práctica de la competencia lógico matemática.

http://aulavirtual.inaeba.edu.mx/ejercicios_practicos/paginas/ejercicios_sec_mate.html

En las siguientes páginas oficiales se tomaron datos reales para situaciones didácticas.

Instituto Nacional de Geografía y Estadística: http://www.inegi.org.mx/default.aspx

Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad: https://www.gob.mx/conabio

Servicio Sismológico Nacional: http://www.ssn.unam.mx/

Organización Mundial de la Salud: http://www.who.int/es/home

Organización Panamericana de la Salud: https://www.paho.org/hq/index.php?lang=es

Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio (NASA, por sus siglas en inglés): https://www.nasa.gov/

Bibliografía consultada

Alarcón Bortolussi, Jesús *et al.*, *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*, México, SEP, 1994.

Bosch, Carlos, *Matemáticas básicas*, México, Limusa, 2000 (Colección Sello de Arena).

Clemens, Stanley, Phares O'Daffer y Thomas Cooney, *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.

Etayo, José Javier *et al.*, *Matemáticas 1*, Madrid, Anaya, 1977.

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, Filadelfia, Saunders College, 1990.

Filloy, Eugenio y Gonzalo Zubieta, *Geometría*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2001.

Itzcovich, Horacio, *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Pappas, Theoni, *Math Stuff*, Estados Unidos, Tetra-Wide World Publishing, 2002.

Shutterstock: pp. 14 (f), 15, 16, 23, 24, 25, 26, 30, 32 (1.10), 35, 40, 44, 48, 51, 55, 58 (1.14), 61, 65, 75, 76, 89, 99 (1.35 y ab.), 100, 103, 104, 106, 126, 128 (11), 130, 131, 134, 139, 140, 143, 144, 145, 149, 150, 153, 154, 159, 202 (arr.), 163, 166, 167, 168, 172, 187, 195, 207, 210, 211, 217, 236, 237, 238, 242, 243, 244, 252, 256, 259, 264, 265, 266; © **Latinstock México:** p. 236 (a).

Ilustraciones:

Víctor Eduardo Sandoval Ibañez: pp. 18, 19, 31, 32 (arr.), 39, 55 (ab.), 58, 89 (b), 92, 202(2.24), 203; **Aarón Gabriel Barreto Sánchez:** pp. 56, 57, 90, 91, 180, 181, 188, 189, 250, 251, 260, 261. **Genaro Rubio Vera:** pp. 250-251, 260-261.

Gráficos:

Jorge Andrés Martínez Cárdenas: pp. 15 (g), 19, 21 (1.4a y b), 36, 47, 62, 68, 70, 78 (1.24), 107, 108, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 119, 120, 128 (8 y 12), 153, 155, 156, 158, 170, 171, 175, 177, 179, 182, 183 (2.11), 184 (2.12), 190, 192, 193, 194, 195, 198, 205, 211, 212 (6), 216, 217, 218, 220, 232, 233, 234, 235, 236, 238, 239, 240, 244, 245, 246, 247, 248 (3.25), 249, 264, 266; **IN Sinister:** pp. 76, 89 (a), 95, 96, 97; **Víctor Duarte Alaniz:** pp. 196, 200, 201, 206.

Especiales:

pp. 12 y 13: *La Vergine con il Bambino e i Santi* (circa 1472), Piero della Francesca (c. 1415 – 1492), óleo sobre tela, 251 x 173 cm, Pinacoteca di Brera;

p. 99 (1.36): (1.36) Extensión del Monte Olimpo, en Marte. Su erupción creó una plataforma de 5 000 kilómetros cuadrados. NASA;

p. 107: El derrame del pozopetrolero Ixtoc I. Plataforma Sedco 135 se quema y se hunde en la Bahía de Campeche, México. Junio de 1979 a marzo de 1980, Administración Oceánica y Atmosférica Nacional, EUA;

p. 120: Resumen mensual de sismisidad, Mayo 2018, Servicio Sismológico Nacional (SSN), Instituto de Geofísica, UNAM;

p. 123: Una página del *Tractatus de latitudinibus formarum* (1505), editada por Biagio Pelacani da Parma (Blasius de Parma) Venecia, un compendio del trabajo del siglo XIV *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum de Nicholas Oresme* (1323-1382), Biblioteca Nacional Central de Florencia, Italia;

pp. 129, 213, 267: Capturas de pantalla de un programa de geometría dinámica, Copyright © International GeoGebra Institute, 2013;

p. 130-131: Geoglifo, *El Mono*, líneas de Nazca, Está situado a unos 400 km al sur de Lima y cubren unos 450 km cuadrados;

p. 160: Tableta Babilónica que enumera los triples pitagóricos, (1800 BCE), Biblioteca de la Universidad de Columbia (N.Y.), EUA;

p. 176: Imagen de la distancia de la Ciudad de México a Oaxtepec, Imágenes ©2018 Landsat / Copernicus, Datos del mapa © 2018 Google, INEGI;

p. 214-215: *Arlequín*, Miguel Guía (1960), escultura en madera, 53 x 25 x 31, 4.4 kg. Colección privada;

p. 236: Iglesia del Santo sepulcro (1160-1170), Torres del Río Navarra, España, Paul M.R. Maeyaert.

Matemáticas 2. Infinita Secundaria
Esta obra se terminó de imprimir en febrero de 2019
en los talleres de Nombre, calle número,
C. P., Ciudad de México, México.

macmillan education

www.edicionescastillo.com
infocastillo@macmillaneducation.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

infinita
SECUNDARIA

ISBN 978-607-540-448-6